

Bac de maths 2026 Amérique du Nord J1

Corrigé du bac de maths

Ce corrigé du bac de spécialité mathématiques (Amérique du Nord, 20 mai 2026, sujet 1) traite les quatre exercices pas à pas : arbre pondéré, loi binomiale, espérance et inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour les abonnements d'une plateforme musicale ; suite récurrente, script Python et équation différentielle pour les perches-soleil ; produit scalaire, plan et distance dans une pyramide ; étude complète d'une fonction avec logarithme et convexité. **Chaque résultat est justifié par le théorème du cours qui l'autorise**, pour que tu puisses reprendre la même rédaction le jour de l'épreuve.

Dans cette page :

- Corrigé de l'exercice 1 : probabilités, loi binomiale et loi de Y
- Corrigé de l'exercice 2 : suite récurrente, algorithme et équation différentielle
- Corrigé de l'exercice 3 : pyramide, plan et distance
- Corrigé de l'exercice 4 : étude de $f(x) = 5 \ln(x^2 + 1) - 3x$

Corrigé de l'exercice 1 : probabilités, loi binomiale et loi de Y

Partie A

1. Les données donnent directement $P(E) = 0,25$ et $P(F) = 0,15$. Les trois abonnements se partagent tous les abonnés, donc $P(C) = 1 - 0,25 - 0,15 = 0,6$.

Pour les branches suivantes, on utilise les probabilités conditionnelles : $P_E(H) = 0,45$ donc $P_E(\overline{H}) = 1 - 0,45 = 0,55$; $P_C(H) = 0,30$ donc $P_C(\overline{H}) = 0,70$. Pour l'abonnement « Famille », l'énoncé ne donne pas les branches : on les calcule plus loin, à la question C.2.

L'arbre se complète ainsi : de la racine partent F (0,15), C (0,6) et E (0,25) ; de E partent H (0,45) et $\overline{H}$ (0,55) ; de C partent H (0,3) et $\overline{H}$ (0,7).

2. On multiplie le long de la branche : $P(E \cap H) = P(E) \times P_E(H) = 0,25 \times 0,45 = 0,1125$.

3. Les événements E, C et F forment une partition de l'ensemble des abonnés. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(H) = P(E \cap H) + P(C \cap H) + P(F \cap H)$$

Or $P(C \cap H) = 0,6 \times 0,3 = 0,18$ et l'énoncé donne $P(F \cap H) = 0,12$. Donc $P(H) = 0,1125 + 0,18 + 0,12 = 0,4125$, ce qu'il fallait démontrer.

4. On cherche la probabilité de E sachant H :

$$P_H(E) = \frac{P(E \cap H)}{P(H)} = \frac{0,1125}{0,4125} = \frac{3}{11} \approx 0,273$$

Le résultat arrondi au millième est **0,273**. Parmi les abonnés qui ont activé l'option, environ 27,3 % ont l'abonnement « Étudiant ».

Partie B

1. On répète huit fois la même expérience, de façon indépendante, avec deux issues (activée ou non) et une probabilité de succès constante $(0,4125)$. La variable (X) suit donc la loi binomiale de paramètres **$(n=8)$ et $(p=0,4125)$** .

2. Aucun abonné n'a activé l'option :

$P(X=0) = \text{dbinom}\{8\}\{0\}\{0,4125\} \times (1-0,4125)^8 = 0,5875^8$. La calculatrice donne $P(X=0) \approx$ **0,014**.

3. a. Pour (n) abonnés, le nombre d'abonnés ayant l'option suit la loi binomiale de paramètres (n) et $(0,4125)$. L'évènement « au moins un abonné a l'option » est le contraire de « aucun abonné n'a l'option », donc :

$$q_n = 1 - 0,5875^n$$

b. On résout $(q_n \geq 0,999)$, soit $(0,5875^n \leq 0,001)$. La fonction $(\ln)$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc $(n \ln(0,5875) \leq \ln(0,001))$. Comme $(\ln(0,5875) < 0)$, diviser par ce nombre change le sens de l'inégalité :

$$n \geq \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,5875)} \approx 12,99$$

Le plus petit entier convenable est **$(n=13)$** . On vérifie :

$$q_{12} \approx 0,9983 < 0,999 \text{ et } q_{13} \approx 0,99901 \geq 0,999.$$

Partie C

1. Le montant est le prix de l'abonnement, plus 2 € si l'option est activée. Les valeurs possibles de (Y) sont donc **5, 7, 10, 12, 16 et 18** euros.

2. Il manque $(P(F \cap \overline{H}) = P(F) - P(F \cap H) = 0,15 - 0,12 = 0,03)$. On calcule ensuite : $(P(Y=5) = P(E \cap \overline{H}) = 0,25 \times 0,55 = 0,1375)$; $(P(Y=7) = 0,1125)$; $(P(Y=10) = 0,06 \times 0,7 = 0,042)$; $(P(Y=12) = 0,18)$; $(P(Y=16) = 0,03)$; $(P(Y=18) = 0,12)$.

(y_i)	5	7	10	12	16	18
$(P(Y=y_i))$	0,1375	0,1125	0,42	0,18	0,03	0,12

La somme des probabilités vaut bien 1.

3.

$(E(Y) = 5 \times 0,1375 + 7 \times 0,1125 + 10 \times 0,42 + 12 \times 0,18 + 16 \times 0,03 + 18 \times 0,12)$, c'est-à-dire
 $(0,6875 + 0,7875 + 4,2 + 2,16 + 0,48 + 2,16 =)$ **10,475**.

Interprétation : sur un très grand nombre d'abonnés, chacun paie en moyenne 10,475 € par mois.

4. La calculatrice donne $(V(Y) \approx)$ **13,70**.

5. a. La variance est le carré de l'écart-type : $(V(Z) = 2^2 =)$ **4**.

b. L'espérance de (Z) est 9, qui est le milieu de l'intervalle $(]6,;12[)$, de demi-largeur 3. Ainsi $(6 \leq Z \leq 12)$ équivaut à $(|Z - 9| \leq 3)$, et :

$$P(6 \leq Z \leq 12) = 1 - P(|Z - 9| \geq 3)$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne $(P(|Z - E(Z)| \geq t) \leq \frac{V(Z)}{t^2})$. Avec $(t = 3)$: $(P(|Z - 9| \geq 3) \leq \frac{4}{9})$.
 Donc :

$$P(6 \leq Z \leq 12) \geq 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \approx 0,56 > 0,5$$

L'affirmation du responsable est **justifiée** : il y a au moins 50 % de chances que le prix soit strictement compris entre 6 et 12 euros.

À retenir : un arbre pondéré se complète avec « la somme des branches issues d'un même nœud vaut 1 », et une probabilité « au moins un » se calcule presque toujours par le contraire. Quand on connaît seulement l'espérance et la variance, c'est l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev qui minore la probabilité d'un intervalle centré sur l'espérance.

Corrigé de l'exercice 2 : suite récurrente, algorithme et équation différentielle

Partie A

1. $(u_1 = 4 - \frac{4}{u_0} = 4 - \frac{4}{4} = 3)$. Au 1^{er} janvier 2026, le modèle donne **3 000 perches-soleil**.

2. a. La fonction (h) est dérivable sur $(]0,;+\infty[)$ et $(h'(x) = \frac{4}{x^2})$. Cette dérivée est strictement positive, donc (h) est **strictement croissante** sur $(]0,;+\infty[)$.

b. On démontre par récurrence la propriété (P_n) : « $(2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4)$ », en remarquant que $(u_{n+1} = h(u_n))$.

Initialisation. $(u_0 = 4)$ et $(u_1 = 3)$, donc $(2 \leq 3 \leq 4 \leq 4)$: (P_0) est vraie.

Hérédité. Suppose (P_n) vraie pour un entier (n) : $(2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4)$

$u_n \leq 4$). Ces nombres sont dans $[0, +\infty[$ où h est croissante, donc $h(2) \leq h(u_{n+1}) \leq h(u_n) \leq h(4)$. Or $h(2) = 4 - 2 = 2$, $h(u_{n+1}) = u_{n+2}$, $h(u_n) = u_{n+1}$ et $h(4) = 3$. On obtient $2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 3$, et comme $3 \leq 4$, (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion. (P_n) est vraie pour tout entier naturel n : **$(2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4)$.**

c. D'après la question précédente, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 2. Une suite décroissante et minorée converge : **(u_n) est convergente**, vers un réel $\ell \geq 2$.

d. La fonction h est continue sur $[0, +\infty[$ (elle y est dérivable) et $\ell \geq 2 > 0$. En passant à la limite dans $u_{n+1} = h(u_n)$, on obtient $\ell = h(\ell)$, soit $\ell = 4 - \frac{4}{\ell}$. En multipliant par ℓ , qui est non nul : $\ell^2 = 4\ell - 4$, donc $\ell^2 - 4\ell + 4 = 0$, soit $(\ell - 2)^2 = 0$. Ainsi **$\ell = 2$** .

e. La population se stabilise autour de 2 000 individus. **Le modèle ne prévoit pas l'élimination de l'espèce** à long terme.

3. a. On cherche le premier indice n tel que $u_n \leq s$. La boucle doit donc se poursuivre tant que u n'est pas strictement inférieur à s , et chaque tour calcule le terme suivant et avance l'indice d'une unité :

```
def population(s) :
    u=4
    n=0
    while u>=s :
        u=4-4/u
        n=n+1
    return n
```

b. Les termes successifs sont $(u_0=4)$, $(u_1=3)$, $(u_2 \approx 2,667)$, $(u_3 \approx 2,5)$, $(u_4 \approx 2,4)$, et ainsi de suite, jusqu'à $(u_9 \approx 2,2)$ exactement puis $(u_{10} = 4 - \frac{4}{2,2} \approx 2,182)$. Pour $(s \approx 2,2)$, la condition $u \geq s$ reste vraie pour $(u_9 \approx 2,2)$: la commande `population(2.2)` renvoie donc **10**.

Dans le contexte : à partir de l'année $(2025 + 10 = 2035)$, le modèle prévoit moins de 2 200 perches-soleil.

Partie B

1. L'équation $y' + y = 2$ s'écrit $y' = -y + 2$, de la forme $y' = ay + b$ avec $(a = -1)$ et $(b = 2)$. Une solution constante est $(-\frac{b}{a} = 2)$, donc les solutions sont les fonctions $(t \mapsto k e^{-t} + 2)$, avec **$(k \in \mathbb{R})$** .

2. La fonction p est l'une de ces solutions : $(p(t) = k e^{-t} + 2)$. La condition

$(p(0)=4)$ donne $(k+2=4)$, donc $(k=2)$ et $(p(t)=2e^{-t}+2)$.

3. On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = 2$. La population tend vers 2 000 individus : **pas d'élimination de l'espèce** non plus avec ce modèle, ce qui est cohérent avec la partie A.

À retenir : pour une suite définie par $(u_{n+1}=h(u_n))$ avec (h) croissante, la récurrence permet de prouver monotonie et bornes ; la limite éventuelle vérifie alors l'équation $(\ell=h(\ell))$. Pour $(y'=ay+b)$, les solutions sont $(ke^{ax}-\frac{b}{a})$ et la condition initiale fixe (k) .

Corrigé de l'exercice 3 : pyramide, plan et distance

Partie A

1. Le carré ABCD est centré en O, avec $B(-1, 1, 0)$ et $C(1, 1, 0)$. Par symétrie par rapport à O, A est l'opposé de C et D l'opposé de B : $A(-1, -1, 0)$ et $D(1, -1, 0)$.

2. On a $\overrightarrow{SC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Le repère étant orthonormé :

$$\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} = 1 \times (-1) + 1 \times 1 + (-2) \times (-2) = -1 + 1 + 4 = 4$$

Le produit scalaire vaut 4.

3. Les normes sont $SC = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$ et $SB = \sqrt{6}$.

Comme

$\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} = SC \times SB \times \cos(\widehat{BSC})$, on obtient $(4 = 6 \cos(\widehat{BSC}))$, donc $\cos(\widehat{BSC}) = \frac{2}{3}$. Ainsi $\widehat{BSC} = \arccos(\frac{2}{3}) \approx 48,2^\circ$.

Partie B

1. a. Les vecteurs $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{SC}$ dirigent le plan (SBC) et ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles).

On calcule :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{SB} &= 0 \times (-1) + 2 \times 1 + 1 \times (-2) = 0 \\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{SC} &= 0 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times (-2) = 0 \end{aligned}$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan : **il est normal au plan (SBC).**

b. Un plan de vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ a une équation de la forme $(2y + z + d = 0)$. Le point $S(0, 0, 2)$ appartient au plan, donc $(0 + 2 + d = 0)$ et $(d = -2)$. Une équation de (SBC) est **$(2y + z - 2 = 0)$** .

2. a. Le point H est le projeté orthogonal de O sur (SBC), donc la droite (OH) est perpendiculaire au plan : le vecteur normal $\vec{n}$ est un vecteur directeur de (OH). Cette droite passe par O, d'où la représentation paramétrique $(x = 0, y = 2t, z = t)$, avec $(t \in \mathbb{R})$.

b. H est sur (OH) et sur (SBC) : ses coordonnées vérifient l'équation du plan. On remplace : $(2 \times 2t + t - 2 = 0)$, soit $(5t = 2)$ et $(t = \frac{2}{5})$. Donc **$H(0, \frac{4}{5}, \frac{2}{5})$** .

c. La distance de O au plan est la longueur OH :

$$OH = \sqrt{0^2 + \frac{16}{25} + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{20}{25}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

La distance du point O au plan (SBC) est bien **$\frac{2\sqrt{5}}{5}$ cm**.

Partie C

1. a. La base ABCD est un carré de côté 2 cm, d'aire 4 cm², et la hauteur est $SO = 2$ cm. Donc $(V = \frac{1}{3} \times 4 \times 2 = \frac{8}{3})$ **$\frac{8}{3}$ cm³**.

b. La pyramide OCBS a pour base le triangle OBC et pour hauteur [SO], comme la grande pyramide. Les diagonales d'un carré le partagent en quatre triangles de même aire, donc l'aire de OBC est le quart de celle de ABCD. Le volume de OCBS est le quart de $\frac{8}{3}$, soit **$\frac{2}{3}$ cm³**.

2. Le triangle SBC est isocèle en S ($SB = SC = \sqrt{6}$). Le point J, milieu de [BC], est le pied de la hauteur issue de S. Dans le triangle SJB rectangle en J, avec $(JB = 1)$: $(SJ^2 = SB^2 - JB^2 = 6 - 1 = 5)$, donc $(SJ = \sqrt{5})$. L'aire est $(\frac{BC \times SJ}{2} = \frac{2 \times \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5})$ **$\sqrt{5}$ cm²**.

3. On calcule le volume de OCBS en prenant SBC pour base. La hauteur correspondante est la distance de O au plan (SBC), c'est-à-dire OH :

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times \sqrt{5} \times OH \quad \text{donc} \quad OH = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

On retrouve **$\frac{2\sqrt{5}}{5}$ cm**, ce qui confirme la partie B.

À retenir : un vecteur est normal à un plan s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan ; la distance d'un point à un plan se lit sur le projeté orthogonal, ou se retrouve en calculant le même volume avec deux bases différentes.

Corrigé de l'exercice 4 : étude de $f(x) = 5 \ln(x^2 + 1) - 3x$

1. Sur le graphique, la courbe est au-dessus de ses tangentes à gauche du point A, puis en dessous à droite. On conjecture que $f(x)$ est **convexe sur $(-\infty, 1]$** et **concave sur $[1, +\infty)$** , la tangente en A traversant la courbe.

2. Quand $x \rightarrow -\infty$, $(x^2 + 1) \rightarrow +\infty$ et $\ln(x^2 + 1) \rightarrow +\infty$: par composition, $\ln(x^2 + 1) \rightarrow +\infty$, donc $5 \ln(x^2 + 1) \rightarrow +\infty$. De plus $-3x \rightarrow +\infty$. Par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

3. a. Pour $x > 0$, on factorise : $(x^2 + 1 = x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right))$. Donc :

$$f(x) = 5 \ln(x^2) + 5 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - 3x = 10 \ln x - 3x + 5 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

Comme $10 \ln x - 3x = x \left(10 \frac{\ln x}{x} - 3\right)$, on obtient l'égalité demandée.

b. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc $10 \frac{\ln x}{x} - 3 \rightarrow -3$. Comme $x \rightarrow +\infty$, le produit $x \left(10 \frac{\ln x}{x} - 3\right)$ tend vers $(-\infty)$. D'autre part $\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \rightarrow 1$ et $\ln(1) = 0$, donc $5 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \rightarrow 0$. Par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

4. a. On dérive avec $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, où $u(x) = x^2 + 1$:

$$f'(x) = 5 \times \frac{2x}{x^2 + 1} - 3 = \frac{10x - 3(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{-3x^2 + 10x - 3}{x^2 + 1}$$

b. Le dénominateur $(x^2 + 1)$ est strictement positif, donc $f'(x)$ a le signe du trinôme $(-3x^2 + 10x - 3)$. Son discriminant est $(\Delta = 100 - 36 = 64)$, il a deux racines :

$$x_1 = \frac{-10 - 8}{-6} = 3 \quad x_2 = \frac{-10 + 8}{-6} = \frac{1}{3}$$

Le coefficient dominant (-3) est négatif : le trinôme est négatif à l'extérieur des racines et positif entre elles. Donc $f(x)$ est **strictement décroissante sur $(-\infty, \frac{1}{3}]$** et **strictement croissante sur $[\frac{1}{3}, +\infty)$** .

x	$(-\infty)$	$\left(\frac{1}{3}\right)$	3	$(+\infty)$
signe de $f'(x)$	$(-)$	$0 \quad (+) \quad 0$	$(-)$	
variations de $f(x)$	$(+\infty)$ $\nearrow$	minimum $\nearrow$	maximum $\searrow$	$(-\infty)$

5. a. Le dénominateur $(x^2 + 1)^2$ est strictement positif, donc $f''(x)$ a le signe de $(-10x^2 + 10 = 10(1 - x)(1 + x))$. C'est un trinôme de coefficient dominant négatif, de racines (-1) et (1) : il est positif sur $(-1, 1)$ et négatif ailleurs. Donc $f(x)$ est **convexe**

sur $(-1, 1]$ et concave sur $(-\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$.

La conjecture est donc **rejetée** pour la partie à gauche de (-1) : l'échelle du graphique ne laissait pas voir que la courbe y est concave. Seuls la convexité entre (-1) et (1) et la concavité à droite de 1 étaient correctement conjecturées.

b. L'équation de la tangente en 1 est $(y=f'(1)(x-1)+f(1))$. On a $(f(1)=5\ln 2-3)$ et $(f'(1)=\frac{-3+10-3}{2}=2)$. Donc :

$$y=2(x-1)+5\ln 2-3 \quad \text{soit} \quad y=2x+5\ln 2-5$$

c. Sur $[1, +\infty[$, la fonction (f) est concave, donc sa courbe est située sous ses tangentes, en particulier sous celle en A . Pour tout $(x \geq 1)$:

$$5\ln(x^2+1)-3x \leq 2x+5\ln 2-5$$

On ajoute $(3x)$: $(5\ln(x^2+1) \leq 5x+5\ln 2-5)$. En divisant par 5 , qui est positif, on obtient $(\ln(x^2+1) \leq x+\ln 2-1)$.

À retenir : pour une forme indéterminée en $(+\infty)$ avec un logarithme, on factorise pour faire apparaître $(\frac{\ln x}{x})$ (croissances comparées). Une courbe concave sur un intervalle est sous ses tangentes sur cet intervalle : c'est ainsi qu'on obtient une inégalité à partir d'une tangente.