

Bac de maths 2026 Amérique du Nord J2

Corrigé du bac de maths

Ce corrigé du sujet 2 de spécialité (Amérique du Nord, 21 mai 2026) te montre comment compléter un arbre pondéré et remonter une probabilité conditionnelle, utiliser Bienaymé-Tchebychev pour encadrer une fréquence, montrer qu'une suite converge par **réurrence** puis par une suite géométrique auxiliaire, manier plans, projetés et volumes dans l'espace, et enfin étudier $(x(\ln x)^2)$ jusqu'à une intégrale calculée par deux intégrations par parties. Chaque résultat est justifié pas à pas avec le théorème ou la propriété du cours utilisé, et chaque exercice se termine par l'idée à retenir, que tu pourras réutiliser dans un autre sujet de bac.

Dans cette page :

- Corrigé de l'exercice 1 : tomates, arbre pondéré et loi binomiale
- Corrigé de l'exercice 2 : une suite récurrente qui tend vers $\sqrt{3}$
- Corrigé de l'exercice 3 : plan, projeté orthogonal et tétraèdre
- Corrigé de l'exercice 4 : étude de $(x(\ln x)^2)$

Corrigé de l'exercice 1 : tomates, arbre pondéré et loi binomiale

Partie A

1. L'énoncé donne $P(A) = 0{,}60$, donc $P(B) = 1 - 0{,}60 = 0{,}40$. Il donne aussi $P_A(C) = 0{,}95$, donc $P_{\overline{A}}(C) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$. Sur l'arbre, tu écris donc : $0{,}60$ sur la branche vers (A) , $0{,}40$ sur la branche vers (B) , $0{,}95$ de (A) vers (C) et $0{,}05$ de (A) vers $(\overline{C})$.

2. a. « Commercialisable et du fournisseur A » est l'intersection $(A \cap C)$. On multiplie le long de la branche :

$$P(A \cap C) = P(A) \times P_A(C) = 0{,}60 \times 0{,}95 = 0{,}57.$$

La probabilité cherchée est **0,57**.

b. Les événements (A) et (B) forment une partition de l'univers. La formule des probabilités totales donne :

$$P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C) = P(A \cap C) + P(B) \times P_B(C).$$

Avec $P(C) = 0{,}91$, on obtient $0{,}91 = 0{,}57 + 0{,}40 \times P_B(C)$, donc $0{,}40 \times P_B(C) = 0{,}34$ et

$$P_B(C) = \frac{0{,}34}{0{,}40} = 0{,}85.$$

On retrouve bien $(P_B(C)=0,85)$.

c. On sait que la tomate est non commercialisable : il faut comparer $(P_{\overline{C}}(A))$ et $(P_{\overline{C}}(B))$. D'abord $(P(\overline{C})=1-0,91=0,09)$. Ensuite :

$$P_{\overline{C}}(A)=\frac{P(A\cap\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{0,60}{0,05+0,09}=\frac{0,03}{0,09}=\frac{1}{3}.$$

$$P_{\overline{C}}(B)=\frac{P(B\cap\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{0,40}{0,15+0,09}=\frac{0,06}{0,09}=\frac{2}{3}.$$

Comme $(\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3})$, une tomate non commercialisable a deux fois moins de chances de venir de A que de B : **le responsable a raison.**

Partie B

1. a. On répète 15 fois, de façon indépendante, une épreuve à deux issues (tomate non commercialisable avec la probabilité $(0,09)$, ou non). (X) suit donc la loi binomiale de paramètres $(n=15)$ et $(p=0,09)$.

b. On applique la formule de la loi binomiale :

$$P(X=2)=\text{dbinom}\{15\}{2}\times 0,09^2\times 0,91^{13}\approx 0,2496.$$

Arrondie au millième : **0,250**.

c. « Au plus deux » signifie $(X\leq 2)$: on additionne $(P(X=0))$, $(P(X=1))$ et $(P(X=2))$, ou on utilise la fonction de répartition de la calculatrice. On trouve $(P(X\leq 2)\approx 0,8531)$, soit **0,853**.

2. a. Pour une loi binomiale, $(E(X_n)=np=0,09n)$ et $(V(X_n)=np(1-p)=0,09\times 0,91\times n=0,0819n)$. Comme $(F_n=\frac{1}{n}X_n)$:

$$E(F_n)=\frac{1}{n}E(X_n)=\frac{0,09n}{n}=0,09,\quad V(F_n)=\frac{1}{n^2}V(X_n)=\frac{0,0819n}{n^2}=\frac{0,0819}{n}.$$

Donc $(E(F_n)=0,09)$ et $(V(F_n)=\frac{0,0819}{n})$.

b. Remarque que $(0,04=0,09-0,05)$ et $(0,14=0,09+0,05)$. L'encadrement $(0,04\leq F_n\leq 0,14)$ équivaut donc à $(|F_n-0,09|\leq 0,05)$, et par événement contraire :

$$P(0,04\leq F_n\leq 0,14)=1-P(|F_n-0,09|\geq 0,05).$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, appliquée à (F_n) d'espérance $(0,09)$ et de variance $(\frac{0,0819}{n})$ avec $(\delta=0,05)$, donne :

$$P(|F_n-0,09|\geq 0,05)$$

$$0 \leq \frac{0,0819}{n} \cdot 0,05^2 = \frac{0,0819}{0,0025n} = \frac{32,76}{n}$$

En retranchant à 1 les deux membres (ce qui renverse l'inégalité), on obtient :

$$P(0,04 \leq F_n \leq 0,14) \geq 1 - \frac{32,76}{n}$$

c. Pour $(n=500)$, la minoration vaut $(1 - \frac{32,76}{500} = 0,93448)$. Il y a donc plus de 93 % de chances que la fréquence observée soit comprise entre $(0,04)$ et $(0,14)$. Ici la fréquence est $(\frac{55}{500} = 0,11)$, qui est bien dans cet intervalle : **le résultat est conforme à ce que le responsable pouvait attendre.**

À retenir : sur un arbre pondéré, on multiplie le long d'une branche et on additionne les branches qui mènent au même événement ; pour encadrer une fréquence, Bienaymé-Tchebychev se règle avec l'écart (δ) lu dans l'encadrement.

Corrigé de l'exercice 2 : une suite récurrente qui tend vers $(\sqrt{3})$

Partie A

1. On factorise : $(f(x)=x \Leftrightarrow x(\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} - 1) = 0)$. Il y a deux cas.

Cas $(x=0)$: c'est une solution.

Cas $(\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} = 1)$: cela donne $(\sqrt{1+x^2} = 2)$, donc $(1+x^2=4)$ (les deux membres sont positifs), soit $(x^2=3)$ et $(x=\sqrt{3})$ ou $(x=-\sqrt{3})$.

L'ensemble des solutions est $(\left\{-\sqrt{3} ; 0 ; \sqrt{3}\right\})$.

2. a. On pose $(u(x)=2x)$ et $(v(x)=\sqrt{1+x^2})$. Alors $(u'(x)=2)$ et $(v'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}})$. Avec $(f=\frac{u}{v})$:

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{1+x^2} - 2x \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

On met le numérateur sur le dénominateur $(\sqrt{1+x^2})$: il devient $(\frac{2(1+x^2) - 2x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}})$. Donc

$$f'(x) = \frac{2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

b. Pour tout réel (x) , $(1+x^2 > 0)$ et $(\sqrt{1+x^2} > 0)$, donc $(f'(x) > 0)$. La fonction (f) est **strictement croissante sur $(\mathbb{R})$** .

Partie B

1. Soit $(\mathcal{P}(n))$ la propriété $(1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3})$.

Initialisation. $(u_0=1)$ et $(u_1=f(1)=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2})$. Or $(1 \leq \sqrt{2} \leq \sqrt{3})$: $(\mathcal{P}(0))$ est vraie.

Fiche en ligne : maths-facile.eu/corrige-bac-maths-2026-amerique-nord-j2/ · Cours, exercices et contrôles corrigés sur

Hérédité. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un entier (n) . Comme (f) est croissante, elle conserve l'ordre :

$$f(1) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(\sqrt{3})$$

On a $f(1) = \sqrt{2} \geq 1$, $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \sqrt{3}$. On en tire $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \sqrt{3}$: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel (n) .

2. D'après la question précédente, $(u_n \leq u_{n+1})$: la suite est croissante ; et $(u_n \leq \sqrt{3})$: elle est majorée. Par le théorème de la convergence monotone, $((u_n))$ **converge** vers un réel (ℓ) vérifiant $(1 \leq \ell \leq \sqrt{3})$.

La fonction (f) est dérivable donc continue sur $(\mathbb{R})$. En passant à la limite dans $(u_{n+1} = f(u_n))$, on obtient $(\ell = f(\ell))$: (ℓ) est une solution de $(f(x) = x)$. D'après la partie A, les solutions sont $(-\sqrt{3})$, (0) et $(\sqrt{3})$; la seule qui est dans $([1 ; \sqrt{3}])$ est $(\sqrt{3})$. Donc $(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3})$.

3. a. Premier terme : $(v_0 = \frac{1^2}{3-1^2} = \frac{1}{2})$. Pour la relation entre deux termes consécutifs, on calcule $(u_{n+1}^2 = \frac{4u_n^2}{1+u_n^2})$, puis

$$v_{n+1} = \frac{\frac{4u_n^2}{1+u_n^2}}{3 - \frac{4u_n^2}{1+u_n^2}} = \frac{4u_n^2}{3(1+u_n^2) - 4u_n^2} = \frac{4u_n^2}{3 - u_n^2} = 4v_n$$

La suite $((v_n))$ est donc **géométrique de raison 4 et de premier terme $(v_0 = 0,5)$** .

b. Pour une suite géométrique, $(v_n = v_0 \times 4^n = (0,5 \times 4^n))$, en particulier $(v_n > 0)$. On isole ensuite (u_n^2) dans la définition de (v_n) :

$$v_n(3 - u_n^2) = u_n^2 \iff 3v_n = u_n^2(1 + v_n) \iff u_n^2 = \frac{3v_n}{1 + v_n}$$

Comme $(u_n > 0)$, on peut prendre la racine : $(u_n = \sqrt{\frac{3v_n}{1 + v_n}})$. En remplaçant (v_n) par $(0,5 \times 4^n)$:

$$u_n = \sqrt{\frac{1,5 \times 4^n}{1 + 0,5 \times 4^n}}$$

c. On divise le numérateur et le dénominateur par (4^n) :

$$u_n = \sqrt{\frac{1,5}{\frac{1}{4^n} + 0,5}}$$

Comme $(4 > 1)$, $(4^n \rightarrow +\infty)$, donc $(\frac{1}{4^n} \rightarrow 0)$ et la fraction tend vers $(\frac{1,5}{0,5} = 3)$. Par continuité de la racine carrée, $(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3})$, comme avant.

Partie C

1. Au début, $(u_0=1)$. À chaque tour de boucle, on ajoute à (S) le carré du terme courant, puis on passe au terme suivant avec la formule de (f) :

```
from math import*

def termes(p) :
    u = 1
    S = 0
    L = [ ]
    for i in range(p) :
        S = S + u**2
        u = 2*u/sqrt(1+u**2)
        L.append(S)
    return L
```

À l'étape (i) , (S) vaut $(u_0^2 + \dots + u_i^2)$, c'est-à-dire (S_{i+1}) : la liste contient bien $(S_1, S_2, \dots, S_p)$. L'ordre des deux lignes dans la boucle est important : on ajoute (u^2) avant de changer (u) .

2. Pour tout (k) , $(1 \leq u_k \leq \sqrt{3})$, donc en élevant au carré $(1 \leq u_k^2 \leq 3)$. (S_n) est une somme de (n) termes, tous compris entre 1 et 3, donc

$$[n \times 1 \leq S_n \leq n \times 3, \text{soit } n \leq S_n \leq 3n.]$$

3. Comme $(S_n \geq n)$ et $(n \rightarrow +\infty)$, le théorème de comparaison donne $(\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty)$.

En divisant l'encadrement par $(n^2 > 0)$:

$(\frac{1}{n} \leq \frac{S_n}{n^2} \leq \frac{3}{n})$. Les deux membres extrêmes tendent vers 0, donc, d'après le théorème des gendarmes, $(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^2} = 0)$.

À retenir : une suite croissante majorée converge, et sa limite est un point fixe de (f) ; une suite auxiliaire géométrique (ici (v_n)) donne la formule explicite et confirme la limite.

Corrigé de l'exercice 3 : plan, projeté orthogonal et tétraèdre

1. Pour $(t=0)$, la représentation paramétrique donne le point $((1 ; 1 ; 1))$: **C appartient à (Δ) .**

Pour A, on cherche (t) avec $(4=1+2t)$, $(2=1+t)$ et $(2=1+2t)$. La première équation donne $(t=\frac{3}{2})$, la deuxième $(t=1)$: c'est contradictoire, donc **A n'appartient pas à (Δ) .**

2. a. Le plan $(\mathcal{P})$ est perpendiculaire à (Δ) , donc un vecteur directeur de (Δ) , à savoir $(\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$, est un

vecteur normal à $\mathcal{P}$. Une équation de $\mathcal{P}$ est donc $(2x+y+2z+d=0)$. Comme A est dans $\mathcal{P}$: $(2 \times 4 + 2 + 2 \times 2 + d = 0)$, soit $(14 + d = 0)$ et $(d = -14)$. On a bien **$(2x + y + 2z - 14 = 0)$** .

b. Pour B : $(2 \times 5 + (-2) + 2 \times 3 - 14 = 10 - 2 + 6 - 14 = 0)$, donc **B appartient à $\mathcal{P}$** . Pour C : $(2 \times 1 + 1 + 2 \times 1 - 14 = -9 \neq 0)$, donc **C n'appartient pas à $\mathcal{P}$** .

3. a. Les coordonnées de D vérifient l'équation de $\mathcal{P}$: $(2 \times 3 + 2 + 2 \times 3 - 14 = 0)$, donc D est dans $\mathcal{P}$. De plus $\overrightarrow{\text{CD}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{n}$: la droite (CD) est dirigée par un vecteur normal à $\mathcal{P}$, donc perpendiculaire à $\mathcal{P}$. D est dans le plan et (CD) lui est orthogonale : **D est le projeté orthogonal de C sur $\mathcal{P}$** .

b. A, B et D sont dans $\mathcal{P}$. On a $\overrightarrow{\text{AB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AD}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, qui ne sont pas colinéaires (la deuxième coordonnée de $\overrightarrow{\text{AD}}$ est nulle mais pas celle de $\overrightarrow{\text{AB}}$). Donc A, B, D ne sont pas alignés et ils déterminent le plan $\mathcal{P}$. Or C n'est pas dans $\mathcal{P}$: **A, B, C et D ne sont pas coplanaires**.

c. Le repère est orthonormé, donc

$$\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AD}} = 1 \times (-1) + (-4) \times 0 + 1 \times 1 = 0.$$

Le produit scalaire vaut **0**.

d. Ce produit scalaire nul signifie que le triangle ABD est rectangle en A. Ses côtés mesurent $(\text{AB} = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2})$ et $(\text{AD} = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2})$, donc son aire est

$$\frac{\text{AB} \times \text{AD}}{2} = \frac{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2} = 3.$$

Prenons ABD comme base. Comme D est le projeté orthogonal de C sur le plan (ABD), la hauteur relative à cette base est CD, avec $(\text{CD} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3)$. Donc

$$V = \frac{1}{3} \times 3 \times 3 = 3.$$

Le volume du tétraèdre ABCD est **3 unités de volume**.

4. a. On a $\overrightarrow{\text{BC}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Notons (X) le point de coordonnées $(\frac{73}{29} ; \frac{-4}{29} ; \frac{51}{29})$. Alors $\overrightarrow{\text{BX}} = \begin{pmatrix} \frac{73}{29} - 5 \\ \frac{-4}{29} + 2 \\ \frac{51}{29} - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{72}{29} \\ \frac{54}{29} \\ -\frac{24}{29} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 36 \\ 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 29 \end{pmatrix} \overrightarrow{\text{BC}}$, donc X est sur la droite (BC). Ensuite $\begin{pmatrix} 43 \\ 29 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 62 \\ 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 29 \end{pmatrix}$ et

$$\begin{pmatrix} 43 \\ 29 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 172 - 186 + 14 \\ 29 \end{pmatrix} = 0.$$

X est sur (BC) et $\begin{pmatrix} 43 \\ 29 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\begin{pmatrix} 62 \\ 29 \end{pmatrix}$: **X est le projeté orthogonal de A sur (BC)**, c'est-à-dire H.

b. Dans le triangle ABC, [AH] est la hauteur issue de A et la base est [BC]. On calcule $BC^2 = 16 + 9 + 4 = 29$ et

$$AH^2 = \frac{43^2 + 62^2 + 7^2}{29^2} = \frac{1849 + 3844 + 49}{841} = \frac{5742}{841} = \frac{198}{29}.$$

L'aire vaut alors

$$\frac{BC \times AH}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{29} \times \sqrt{\frac{198}{29}} = \frac{\sqrt{198}}{2} = \frac{3\sqrt{22}}{2}.$$

c. La distance (h) de D au plan (ABC) est la hauteur du tétraèdre relative à la base ABC. En écrivant le volume avec cette base :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{22}}{2} \times h \\ h &= \frac{\sqrt{22}}{2}, h \quad \Longleftrightarrow \\ h &= \frac{6}{\sqrt{22}} = \frac{6\sqrt{22}}{22} = \frac{3\sqrt{22}}{11}. \end{aligned}$$

La distance de D au plan (ABC) est $\left(\frac{3\sqrt{22}}{11}\right)$ (environ 1,28).

À retenir : un tétraèdre se calcule avec n'importe quelle de ses faces comme base ; calculer le volume de deux façons permet d'en déduire une distance à un plan.

Corrigé de l'exercice 4 : étude de $(x \ln x)^2$

1. On écrit $f(x) = x \ln x \ln x$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow +\infty$ et $\ln x \rightarrow +\infty$, donc par produit $\displaystyle \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. a. Pour $x > 0$,

$$g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} \ln(\sqrt{x}) = \sqrt{x} \times \frac{1}{2} \ln x. \text{ Donc}$$

$$4 \left(g(\sqrt{x}) \right)^2 = 4 \times x \times \frac{1}{4} (\ln x)^2 = x (\ln x)^2 = f(x).$$

b. Quand $x \rightarrow 0$, $\sqrt{x} \rightarrow 0$. Par croissances comparées, $\displaystyle \lim_{X \rightarrow 0} X \ln X = 0$, donc par composition $g(\sqrt{x}) \rightarrow 0$, puis

$$f(x) = 4 \left(g(\sqrt{x}) \right)^2 \rightarrow 0. \text{ Ainsi } \displaystyle \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

3. a. On dérive le produit $(x \times (\ln x)^2)$:

$$[f'(x) = 1 \times (\ln x)^2 + x \times \frac{2 \ln x}{x} = (\ln x)^2 + 2 \ln x = (\ln x)(\ln x + 2).]$$

b. Le signe de $(f'(x))$ se lit sur deux facteurs : $(\ln x > 0 \iff x > 1)$, et $(2 + \ln x > 0 \iff \ln x > -2 \iff x > \text{e}^{-2})$. Le produit est donc positif sur $(]0 ; \text{e}^{-2}[)$, négatif sur $(]\text{e}^{-2} ; 1[)$ et positif sur $(]1 ; +\infty[)$. Ainsi (f) est **croissante sur $(]0 ; \text{e}^{-2}[)$, décroissante sur $(]\text{e}^{-2} ; 1[)$ et croissante sur $(]1 ; +\infty[)$** , avec $(f(0^+) = 0)$, $(f(1) = 0)$ et $(f(x) \rightarrow +\infty)$ en $(+\infty)$.

c. Sur $(]0 ; 1[)$, le maximum est atteint en (e^{-2}) :

$$[f(\text{e}^{-2}) = \text{e}^{-2} \times (-2)^2 = 4 \text{e}^{-2} \approx 0{,}54.]$$

4. a. Sur $(]0 ; 1[)$, $(f(x)) \leq 4 \text{e}^{-2} < 2$: l'équation $(f(x) = 2)$ n'a pas de solution. Sur $(]1 ; +\infty[)$, (f) est continue, strictement croissante, avec $(f(1) = 0 < 2)$ et une limite $(+\infty)$. D'après le théorème de la bijection, l'équation $(f(x) = 2)$ a exactement une solution sur cet intervalle. Elle en a donc **une seule sur $(]0 ; +\infty[)$** , notée (α) .

b. À la calculatrice (tableau de valeurs ou résolution numérique), $(f(2{,}4)) \approx 1{,}84 < 2$ et $(f(2{,}5)) \approx 2{,}10 > 2$. Donc **$(2{,}4 < \alpha < 2{,}5)$** (en fait $(\alpha \approx 2{,}46)$).

5. a. Sur $([a ; 1])$, (f) est positive. L'intégrale $(\int_a^1 f(x) \, dx)$ est donc **l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par la courbe de (f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $(x=a)$ et $(x=1)$** .

b. On intègre par parties avec $(u'(x) = x)$, $(u(x) = \frac{x^2}{2})$ et $(v(x) = (\ln x)^2)$, $(v'(x) = \frac{2 \ln x}{x})$ (toutes ces fonctions sont de classe (C^1) sur $([a ; 1])$) :

$$[\int_a^1 f(x) \, dx = \left[\frac{x^2}{2} (\ln x)^2 \right]_a^1 - \int_a^1 \frac{x^2}{2} \times \frac{2 \ln x}{x} \, dx.]$$

Comme $(\ln 1 = 0)$, le crochet vaut $(0 - \frac{a^2}{2} (\ln a)^2)$ et l'intégrale restante se simplifie en $(\int_a^1 x \ln x \, dx)$, d'où

$$[\int_a^1 f(x) \, dx = -\frac{a^2}{2} (\ln a)^2 - \int_a^1 x \ln x \, dx.]$$

c. On refait une intégration par parties pour $(\int_a^1 x \ln x \, dx)$, avec $(u'(x) = x)$, $(u(x) = \frac{x^2}{2})$ et $(v(x) = \ln x)$, $(v'(x) = \frac{1}{x})$:

$$[\int_a^1 x \ln x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_a^1 - \int_a^1 \frac{x}{2} \, dx = -\frac{a^2}{2} \ln a - \left[\frac{1}{4} - \frac{a^2}{4} \right].]$$

On reporte dans le résultat de la question précédente, en changeant les signes de la

parenthèse :

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 + \frac{a^2}{2} \ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}.$$

d. On réécrit l'expression pour faire apparaître $(a \ln a)$:

$$\int_a^1 f(x) dx = -\frac{1}{2}(a \ln a)^2 + \frac{a}{2} \ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}.$$

Par croissances comparées, $(a \ln a \rightarrow 0)$ quand $(a \rightarrow 0)$. Les deux premiers termes tendent donc vers 0, et $(\frac{1}{4} - \frac{a^2}{4} \rightarrow \frac{1}{4})$. Ainsi

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 f(x) dx = \frac{1}{4}.$$

À retenir : pour intégrer $(x(\ln x)^2)$, on dérive le logarithme et on intègre le monôme, deux fois de suite ; aux bornes proches de 0, on se ramène toujours à $(a \ln a \rightarrow 0)$ (croissances comparées).