

Bac de maths 2026 Centres étrangers J1

Corrigé du bac de maths

Ce corrigé détaille chaque question du sujet 1 de spécialité passé en Centres étrangers en juin 2026. Tu y verras comment remplir un arbre pondéré sur les lames d'escrime, appliquer la formule des probabilités totales, la loi binomiale et l'inégalité de concentration, puis justifier cinq affirmations sur les suites et les équations différentielles. Tu y trouveras aussi la méthode du plan normal dans le cube et l'étude complète de $\frac{\ln(x)}{x^2}$ avec sa suite d'intégrales. Les théorèmes du programme utilisés sont cités à chaque étape.

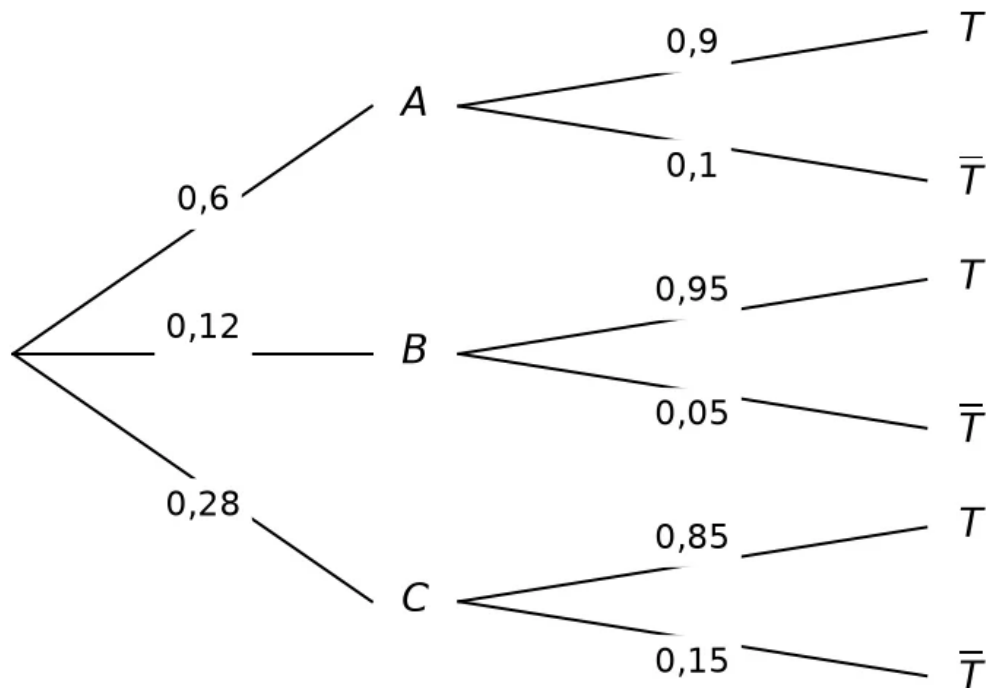
Dans cette page :

- Corrigé de l'exercice 1 : probabilités, loi binomiale et inégalité de concentration
- Corrigé de l'exercice 2 : cinq affirmations sur les suites et les fonctions
- Corrigé de l'exercice 3 : géométrie dans le cube
- Corrigé de l'exercice 4 : étude de la fonction $\ln(x)/x^2$ et suite d'intégrales

Corrigé de l'exercice 1 : probabilités, loi binomiale et inégalité de concentration

Partie A

1. Les probabilités des fournisseurs sont $(P(A)=0{,}6)$ et $(P(B)=0{,}12)$. Comme A, B et C se partagent tout le stock, $(P(C)=1-0{,}6-0{,}12=0{,}28)$. Sur les branches suivantes, on lit les pourcentages de lames conformes, et on complète à 1 pour les lames non conformes.



2. On multiplie les probabilités le long de la branche qui mène à (A) puis à $(\overline{T})$:

$$P(A \cap \overline{T}) = P(A) \times P_A(\overline{T}) = 0,6 \times 0,1 = \mathbf{0,06}.$$

Cela signifie que **6 % des lames de l'équipementier viennent du fournisseur A et ne sont pas conformes.**

3. Les événements (A) , (B) et (C) sont deux à deux incompatibles et leur réunion est tout l'univers : ils forment une partition. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(A \cap T) + P(B \cap T) + P(C \cap T) = 0,6 \times 0,9 + 0,12 \times 0,95 + 0,28 \times 0,85.$$

$$P(T) = 0,54 + 0,114 + 0,238 = \mathbf{0,892}.$$

4. On cherche $(P_{\overline{T}}(B))$. On a $(P(\overline{T}) = 1 - 0,892 = 0,108)$ et $(P(B \cap \overline{T}) = 0,12 \times 0,05 = 0,006)$. Donc

$$P_{\overline{T}}(B) = \frac{P(B \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{0,006}{0,108} = \frac{1}{18} \approx \mathbf{0,056}.$$

Parmi les lames non conformes, environ 5,6 % viennent du fournisseur B.

Partie B

1. (X) compte les lames non conformes dans un échantillon de 75 tirées de façon identique et indépendante, avec une probabilité de 0,108 pour chacune. Elle suit donc la loi

binomiale de paramètres $(n=75)$ et $(p=0,108)$.

2. On applique la formule de la loi binomiale :

$$P(X=6) = \binom{75}{6} \times 0,108^6 \times 0,892^{69} \approx 0,1201.$$

La probabilité d'avoir exactement 6 lames non conformes est d'environ **0,120**.

3. « Strictement plus de 8 » veut dire « au moins 9 ». On passe par l'évènement contraire, que la calculatrice donne directement :

$$P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8) \approx 1 - 0,578 = 0,422.$$

Comme $0,422 < 0,5$, **l'équipementier a raison**.

Partie C

1. Les (X_i) suivent la même loi que (X) et sont indépendantes. Pour une loi binomiale, $E(X) = np = 75 \times 0,108 = 8,1$ et $V(X) = np(1-p) = 75 \times 0,108 \times 0,892 = 7,2252$. Par linéarité de l'espérance, $E(M_n) = \frac{n \cdot E(X)}{n} = 8,1$. Par indépendance, les variances s'additionnent, et en factorisant par $\frac{1}{n^2}$:

$$V(M_n) = \frac{1}{n^2} \times n \cdot V(X) = \frac{7,2252}{n}.$$

2. On utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable (M_n) avec le réel $(\delta=2)$:

$$P\big(|M_n - E(M_n)| \geq \delta\big) \leq \frac{V(M_n)}{\delta^2}.$$

Avec $E(M_n) = 8,1$, $V(M_n) = \frac{7,2252}{n}$ et $(\delta=2)$, on obtient

$$P\big(|M_n - 8,1| \geq 2\big) \leq \frac{7,2252}{4n} = \frac{1}{8063}.$$

3. L'évènement $(|M_n - 8,1| < 2)$ est le contraire de $(|M_n - 8,1| \geq 2)$. Donc

$$P\big(|M_n - 8,1| < 2\big) = 1 - P\big(|M_n - 8,1| \geq 2\big) \geq 1 - \frac{1}{8063}.$$

Il suffit que $(1 - \frac{1}{8063}) \geq 0,95$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{8063} \leq 0,05, \text{ soit}$$

$$n \geq \frac{1}{0,05} = 36. \text{ Le plus petit entier convenable est } (n=37).$$

Interprétation : si l'équipementier participe à au moins 37 compétitions, la moyenne du nombre de lames non conformes par échantillon est, avec une probabilité d'au moins 95 %, comprise entre 6,1 et 10,1.

À retenir : un arbre pondéré se complète par les compléments à 1, la formule des

probabilités totales donne $(P(T))$, et pour une moyenne de (n) variables indépendantes l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $(V(M_n) = \frac{V(X)}{n})$ permet de trouver un nombre minimal d'épreuves.

Corrigé de l'exercice 2 : cinq affirmations sur les suites et les fonctions

1. Affirmation 1 : vraie. Il suffit de calculer $(f'(x) + f(x))$. On a $(f'(x) = -4\mathrm{e}^{-x} - \sin(x) + \cos(x))$. Alors

$$[f'(x) + f(x) = -4\mathrm{e}^{-x} - \sin(x) + \cos(x) + 4\mathrm{e}^{-x} - \cos(x) + \sin(x) = 0.]$$

La fonction (f) vérifie bien l'équation (E) .

2. Affirmation 2 : vraie. Les abscisses des points d'intersection sont les solutions de $(2x = \sin(x))$, c'est-à-dire de $(h(x) = 0)$ avec $(h(x) = 2x - \sin(x))$. La fonction (h) est dérivable sur $(\mathbb{R})$ et $(h'(x) = 2 - \cos(x))$. Comme $(\cos(x) \leq 1)$, on a $(h'(x) \geq 1 > 0)$: (h) est strictement croissante sur $(\mathbb{R})$, donc elle prend chaque valeur au plus une fois. Or $(h(0) = 0)$. L'équation $(h(x) = 0)$ a donc **exactement une solution, $(x = 0)$** , et les courbes n'ont qu'un seul point d'intersection : l'origine.

3. Affirmation 3 : fausse. Pour tout (n) , $(-1 \leq \sin(n) \leq 1)$, donc $(2n - 1 \leq 2n + \sin(n) \leq 2n + 1)$. En divisant par $(n + 1 > 0)$:

$$[\frac{2n-1}{n+1} \leq v_n \leq \frac{2n+1}{n+1}.]$$

Or $(\frac{2n-1}{n+1} = \frac{2 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}})$ et $(\frac{2n+1}{n+1} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}})$ tendent tous deux vers 2. D'après le théorème des gendarmes, **(v_n) converge vers 2** : elle ne diverge pas.

4. Affirmation 4 : vraie. Démontrons par récurrence que $(u_n = n^2)$ pour tout $(n \geq 1)$.

Initialisation : $(u_1 = 1 = 1^2)$.

Hérédité : soit $(n \geq 1)$ tel que $(u_n = n^2)$. Alors $(u_{n+1} = u_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2)$, ce qui est la propriété au rang $(n+1)$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 1 et héréditaire, donc **$(u_n = n^2)$ pour tout $(n \geq 1)$** .

5. Affirmation 5 : vraie. On a $(u_n = \mathrm{e}^{-n} = \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n)$: c'est une suite géométrique de premier terme $(u_0 = 1)$ et de raison $(q = \frac{1}{\mathrm{e}})$. La somme de ses $(n+1)$ premiers termes vaut

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-\mathrm{e}^{-(n+1)}}{1-\mathrm{e}^{-1}}.$$

Comme $(0 < q < 1)$, $(q^{n+1} \rightarrow 0)$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}} = \frac{1}{\mathrm{e}-1}.$$

À retenir : pour un vrai ou faux, on démontre les affirmations vraies et on le prouve en étudiant ce qui se passe réellement pour les fausses. Les outils utilisés ici sont la vérification directe d'une solution, la stricte monotonie, le théorème des gendarmes, la récurrence et la somme géométrique.

Corrigé de l'exercice 3 : géométrie dans le cube

1. Dans le repère

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$, on a $A(0;0;0)$, $C(1;1;0)$, $E(0;0;1)$, $F(1;0;1)$ et $H(0;1;1)$. Chaque point est un milieu, donc on fait la moyenne des coordonnées des extrémités :

$$I\left(\frac{1}{2};0;1\right), J\left(0;\frac{1}{2};1\right), K\left(0;0;\frac{1}{2}\right).$$

2. a. On a $\overrightarrow{AI}\left(\frac{1}{2};0;1\right)$ et $\overrightarrow{AJ}\left(0;\frac{1}{2};1\right)$. Le repère est orthonormé, donc

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2} \times 0 + 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times 1 = \mathbf{1}.$$

b. On calcule les longueurs :

$$AI = \sqrt{\frac{1}{4} + 0 + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ et de même}$$

$$AJ = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = AI \times AJ \times \cos \widehat{IAJ}, \text{ d'où}$$

$$1 = \frac{5}{4} \cos \widehat{IAJ} \text{ et}$$

$$\cos \widehat{IAJ} = \frac{4}{5} \quad \text{donc} \quad \widehat{IAJ} \approx \mathbf{36,9^\circ}.$$

3. a. On a $\overrightarrow{KC}\left(1;1;-\frac{1}{2}\right)$. Calculons ses produits scalaires avec deux vecteurs du plan :

$$\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{AI} = 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times 0 -$$

$$\frac{1}{2} \times 1 = 0, \quad \overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{AJ} = 1 \times 0 + 1 \times \frac{1}{2} -$$

$$m\{A\}} = 1 \times 0 + 1 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 1 = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AJ}}$ ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles), donc ils dirigent le plan (AIJ). $\overrightarrow{\mathrm{KC}}$ est orthogonal à ces deux vecteurs : **c'est un vecteur normal au plan (AIJ)**.

b. Un plan de vecteur normal $\overrightarrow{\mathrm{KC}}$ a une équation de la forme $(x+y-\frac{1}{2}z+d=0)$. Le point A appartient au plan et a pour coordonnées $(0;0;0)$, donc $(d=0)$. Une équation du plan (AIJ) est donc

$$(x+y-\frac{1}{2}z=0.)$$

4. a. Le point L est le projeté orthogonal de C sur le plan : il est sur la droite passant par C et dirigée par le vecteur normal $\overrightarrow{\mathrm{KC}}$. Cette droite a pour représentation paramétrique $(x=1+t)$, $(y=1+t)$, $(z=-\frac{t}{2})$. Le point L est aussi dans le plan, donc ses coordonnées vérifient l'équation du plan :

$$(1+t)+(1+t)-\frac{1}{2}\left(-\frac{t}{2}\right)=0 \iff 2+2t+\frac{t}{4}=0 \iff \frac{9}{4}t=-2 \iff t=-\frac{8}{9}.$$

On remplace dans la représentation :

$$\left(\mathbf{L}\left(\frac{1}{9};\frac{1}{9};\frac{4}{9}\right)\right).$$

b. La distance de C au plan est la longueur CL :

$$\begin{aligned} \mathrm{CL} &= \sqrt{\left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{64+64+16}{81}} = \sqrt{\frac{144}{81}} = \frac{12}{9} \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

5. a. On a $\overrightarrow{\mathrm{IM}} \left(1-\frac{1}{2}; m-0; 1-1\right) = \left(\frac{1}{2}; m; 0\right)$. La droite (IM) passe par I $\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$ et est dirigée par ce vecteur, ce qui donne

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s \\ y = ms \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{dans } \mathbb{R}.$$

b. Deux droites sont coplanaires si elles sont parallèles ou sécantes. Les vecteurs directeurs $\overrightarrow{\mathrm{IM}} \left(\frac{1}{2}; m; 0\right)$ et $\overrightarrow{\mathrm{KC}} \left(1; 1; -\frac{1}{2}\right)$ ne sont jamais colinéaires, car la troisième coordonnée de l'un est nulle et celle de l'autre non. Les droites ne sont donc jamais parallèles. Cherchons un point commun, avec (KC) : $(x=1+t)$, $(y=1+t)$, $(z=-\frac{t}{2})$. On résout

$$\begin{cases} 1+t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s \\ 1+t = ms \\ -\frac{t}{2} = 1 \end{cases}$$

La troisième équation donne $(t=-2)$. La première devient

$$(-1 = \frac{1}{2} + \frac{s}{2}), \text{ donc } (s=-3).$$

La deuxième s'écrit alors $(-1 = -3m)$, soit

$m = \frac{1}{3}$). Il y a donc un point d'intersection **uniquement pour** $m = \frac{1}{3}$.

Pour toute autre valeur de m , les droites ne sont ni parallèles ni sécantes. **On ne peut donc pas affirmer qu'elles sont coplanaires quelle que soit la valeur de m** : c'est faux.

À retenir : un vecteur orthogonal à deux vecteurs non colinéaires d'un plan est normal à ce plan, ce qui donne l'équation cartésienne. Le projeté orthogonal s'obtient en intersectant la droite normale avec le plan, et deux droites de l'espace ne sont coplanaires que si elles sont parallèles ou sécantes.

Corrigé de l'exercice 4 : étude de la fonction $\ln(x)/x^2$ et suite d'intégrales

Partie A

1. a. En (0^+) : $\ln(x) \rightarrow -\infty$ et $x^2 \rightarrow 0^+$, donc par quotient $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$. En $(+\infty)$: par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$.

b. La première limite signifie que l'axe des ordonnées (droite d'équation $x=0$) est **asymptote verticale** à $(\mathcal{C}_f)$. La seconde signifie que l'axe des abscisses (droite d'équation $y=0$) est **asymptote horizontale** à $(\mathcal{C}_f)$ en $(+\infty)$.

2. On dérive le quotient $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = x^2$, donc $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = 2x$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln(x) \times 2x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{x(1 - 2 \ln(x))}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln(x)}{x^3}.$$

3. Comme $x^3 > 0$, $f'(x)$ a le signe de $(1 - 2 \ln(x))$. Or $1 - 2 \ln(x) > 0 \iff \ln(x) < \frac{1}{2} \iff x < \sqrt{\mathrm{e}}$. La fonction f est donc croissante sur $[0; \sqrt{\mathrm{e}}]$ et décroissante sur $[\sqrt{\mathrm{e}}; +\infty[$. Son maximum vaut

$$f(\sqrt{\mathrm{e}}) = \frac{\ln(\sqrt{\mathrm{e}})}{\mathrm{e}} = \frac{\frac{1}{2}}{\mathrm{e}} = \frac{1}{2\mathrm{e}}.$$

x	0	$\sqrt{\mathrm{e}}$	$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$ puis 0 puis $-$	
variations de f	$-\infty$	$\frac{1}{2\mathrm{e}}$ (maximum)	0

4. L'équation de la tangente en (1) est $y = f'(1)(x-1) + f(1)$. On a $f(1) = \frac{\ln 1}{1} = 0$ et $f'(1) = \frac{1-0}{1} = 1$. La tangente (Δ) a donc pour

équation $(y=x-1)$.

5. On dérive $(f'(x)=\frac{1-2\ln(x)}{x^3})$ comme un quotient avec $(u(x)=1-2\ln(x))$, $(u'(x)=-\frac{2}{x})$, $(v(x)=x^3)$ et $(v'(x)=3x^2)$:

$$f''(x)=\frac{-\frac{2}{x}\times x^3-(1-2\ln(x))\times 3x^2}{x^6}=\frac{-2x^2-3x^2+6x^2\ln(x)}{x^6}=\frac{x^2(-5+6\ln(x))}{x^6}=\frac{-5+6\ln(x)}{x^4}.$$

6. a. Comme $(x^4>0)$, $(f''(x))$ a le signe de $(-5+6\ln(x))$, qui est positif si et seulement si $(\ln(x)>\frac{5}{6})$, c'est-à-dire $(x>\mathrm{e}^{\frac{5}{6}})$. La fonction (f) est donc **concave sur $(\left[0;\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right])$ et convexe sur $(\left[\mathrm{e}^{\frac{5}{6}};+\infty\right])$** . La dérivée seconde s'annule en changeant de signe en $(\mathrm{e}^{\frac{5}{6}})$, d'où un point d'inflexion d'abscisse $(\mathrm{e}^{\frac{5}{6}})$ et d'ordonnée

$$f(\mathrm{e}^{\frac{5}{6}})=\frac{\frac{5}{6}}{\mathrm{e}^{\frac{5}{3}}}=\frac{5}{6\mathrm{e}^{\frac{5}{3}}}.$$

Le point d'inflexion est

$$(\mathrm{e}^{\frac{5}{6}};\frac{5}{6\mathrm{e}^{\frac{5}{3}}}).$$

b. Une fonction concave sur un intervalle a sa courbe située sous chacune de ses tangentes. Sur $(\left[0;\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right])$, la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est donc sous la tangente (Δ) : pour tout (x) de cet intervalle, $(f(x)\leq x-1)$, c'est-à-dire $(x-1\geq \frac{\ln(x)}{x^2})$.

7. Pour $(x\geq \mathrm{e}^{\frac{5}{6}})$, on majore $(f(x))$ et on minore $(x-1)$. D'une part, $(f(x)\leq \frac{1}{2\mathrm{e}}<1)$, puisque $(\frac{1}{2\mathrm{e}})$ est le maximum de (f) et que $(2\mathrm{e}>1)$. D'autre part, $(\ln(2)<\frac{5}{6})$ (car $(\ln(2)\approx 0,69)$), donc $(\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}>2)$ et $(x-1\geq \mathrm{e}^{\frac{5}{6}}-1>1)$. On en tire

$$x-1>1>f(x),\quad\text{donc}\quad x-1\geq \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

Partie B

1. Sur $([1;n])$, $(\ln(x)\geq 0)$, donc $(f(x)\geq 0)$. Le nombre (I_n) est donc **l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $(x=1)$ et $(x=n)$** .

2. Pour tout $(n\geq 1)$, d'après la relation de Chasles :

$$I_{n+1}-I_n=\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x=\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x.$$

La fonction (f) est positive sur $([n;n+1]\subset[1;+\infty])$ et les bornes sont dans l'ordre croissant, donc cette intégrale est positive. Ainsi $(I_{n+1}-I_n\geq 0)$ et **la suite**

(I_n) est croissante.

3. Le premier rectangle (entre 1 et 2) a pour hauteur le maximum de f , soit $\frac{1}{2\mathrm{e}}$, et pour largeur 1 : c'est le terme déjà placé dans S . Ensuite f est décroissante sur $[2;+\infty[$, donc le rectangle de base $[i;i+1]$ a pour hauteur la valeur de f au bord gauche, $f(i)=\frac{\ln(i)}{i^2}$. Pour i allant de 2 à 9, il faut ajouter cette aire à S . La fonction $\ln$ s'écrit `log` en Python.

```
from math import *

S=1/(2*exp(1))
for i in range (2,10):
    S = S + log(i)/(i**2)
print(S)
```

4. On pose $u(x)=\ln(x)$ et $v'(x)=\frac{1}{x^2}$, donc $u'(x)=\frac{1}{x}$ et $v(x)=-\frac{1}{x}$. Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1;n]$. L'intégration par parties donne

$$I_n = \left[-\frac{\ln(x)}{x} \right]_1^n + \int_1^n \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} \mathrm{d}x = -\frac{\ln(n)}{n} + 0 + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^n = -\frac{\ln(n)}{n} - \frac{1}{n} + 1.$$

En mettant au même dénominateur :

$$I_n = \frac{n-1-\ln(n)}{n}.$$

5. On écrit $I_n = 1 - \frac{1}{n} - \frac{\ln(n)}{n}$. On a $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ et, par croissances comparées, $\frac{\ln(n)}{n} \rightarrow 0$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \mathbf{1}.$$

À retenir : l'étude complète d'une fonction (limites, dérivées, variations, convexité) se met au service de comparaisons comme « courbe sous la tangente ». Pour une intégrale du type $\ln(x) \times$ une puissance de x , on choisit $u=\ln$ dans l'intégration par parties.