

Dénombrement

Corrigé des exercices - Terminale

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Cardinal d'une réunion ★★★

Notons F et H les deux ensembles. $|F \cup H| = |F| + |H| - |F \cap H| = 25 + 18 - 8 = 35$.

Aucun des deux sports : $40 - 35 = 5$ élèves (complémentaire).

Réponse : 35 élèves pratiquent au moins un sport et 5 n'en pratiquent aucun.

2 Menu au restaurant ★★★

Trois choix successifs indépendants : principe multiplicatif. $3 \times 4 \times 2 = 24$.

Réponse : 24 menus.

3 Codes de cadenas ★★★

a. Un code est un 4-uplet de $\{0 ; \dots ; 9\}$: $10^4 = 10\,000$.

b. Arrangement de 4 chiffres parmi 10 : $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040$.

4 Factorielles ★★★

a. $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

b. $8! / 6! = 8 \times 7 = 56$.

c. $10! / (8! \times 2!) = (10 \times 9) / 2 = 45$.

5 Podium ★★★

L'ordre compte et il n'y a pas de répétition : arrangement de 3 parmi 12. $12 \times 11 \times 10 = 1\,320$.

Réponse : 1 320 podiums.

6 Calculer des coefficients binomiaux ★★★

$C(7, 2) = (7 \times 6) / 2 = 21$. $C(10, 3) = (10 \times 9 \times 8) / 6 = 120$. $C(8, 0) = 1$ (la seule partie vide). $C(9, 9) = 1$ (l'ensemble tout entier).

7 Anagrammes d'un mot ★★★

PIANO : 5 lettres distinctes, donc $5! = 120$ anagrammes.

SOLEIL : 6 lettres dont la lettre L deux fois. $6! / 2! = 720 / 2 = 360$ (on divise par le nombre de façons d'échanger les deux L).

8 Comité ★★★

L'ordre ne compte pas : $C(12, 5) = (12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8) / 120 = 95\,040 / 120 = 792$.

Réponse : 792 comités.

9 Comité avec contraintes ★★★

- a. On choisit 2 filles parmi 7 puis 3 garçons parmi 5 : $C(7, 2) \times C(5, 3) = 21 \times 10 = 210$.
- b. Complémentaire : aucun garçon, donc 5 filles parmi 7 : $C(7, 5) = 21$. Total $C(12, 5) = 792$. Donc $792 - 21 = 771$ comités.

10 Mains de cartes ★★★

- a. $C(32, 5) = 201\,376$.
- b. 2 rois parmi 4 et 3 cartes parmi les 28 autres : $C(4, 2) \times C(28, 3) = 6 \times 3\,276 = 19\,656$.
- c. Complémentaire (aucun roi) : $C(28, 5) = 98\,280$. Donc $201\,376 - 98\,280 = 103\,096$.

11 Anagrammes avec répétitions ★★★

11 lettres : M (1), I (4), S (4), P (2). Nombre d'anagrammes : $11! / (4! \times 4! \times 2!) = 39\,916\,800 / (24 \times 24 \times 2) = 39\,916\,800 / 1152 = 34\,650$.

12 Lire le triangle de Pascal ★★★

- a. On additionne deux nombres voisins de la ligne 5 (1, 5, 10, 10, 5, 1) : 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.

- b. $C(5, 2) + C(5, 3) = 10 + 10 = 20 = C(6, 3)$. ✓
- c. $C(n, 2) = n(n - 1) / 2 = 45$ équivaut à $n(n - 1) = 90 = 10 \times 9$. Donc $n = 10$
(l'autre solution, -9 , est rejetée car n est un entier naturel).

13 Plaques d'immatriculation ★★★

Avec répétitions : $26^2 \times 10^3 = 676 \times 1000 = 676\,000$.

Sans répétition : $26 \times 25 \times 10 \times 9 \times 8 = 650 \times 720 = 468\,000$.

14 Poignées de mains et diagonales ★★★

a. Une poignée de mains est une partie à 2 personnes parmi 15 : $C(15, 2) = (15 \times 14) / 2 = 105$.

b. Un segment joignant deux sommets : $C(10, 2) = 45$. Parmi eux, 10 sont des côtés. Il y a donc $45 - 10 = 35$ diagonales.

15 Une équation binomiale ★★★

$C(n, 2) = n(n - 1) / 2 = 78$ équivaut à $n^2 - n - 156 = 0$. Discriminant $\Delta = 1 + 624 = 625 = 25^2$. Solutions : $n = (1 + 25) / 2 = 13$ ou $n = (1 - 25) / 2 = -12$ (à rejeter).

Vérification : $C(13, 2) = 13 \times 12 / 2 = 78$. **Réponse : $n = 13$.**

16 Démontrer une identité ★★★

$k \times C(n, k) = k \times n! / (k! (n - k)!) = n! / ((k - 1)! (n - k)!) = n \times (n - 1)! / ((k - 1)! ((n - 1) - (k - 1))!) = n \times C(n - 1, k - 1)$.

Pour $n = 6, k = 2$: $2 \times 15 = 30$ et $6 \times C(5, 1) = 6 \times 5 = 30$. ✓

Interprétation : choisir un comité de k personnes parmi n puis son président (k choix) revient à choisir d'abord le président (n choix) puis les $k - 1$ autres membres parmi $n - 1$.

17 Tirage dans une urne ★★★

Univers : $C(12, 4) = 495$ tirages équiprobables.

A : 2 rouges parmi 5 et 2 non rouges parmi 7 : $C(5, 2) \times C(7, 2) = 10 \times 21 = 210$. $P(A) = 210 / 495 = \mathbf{14/33}$.

B : complémentaire, aucune verte, donc 4 boules parmi les 9 non vertes : $C(9, 4) = 126$.
 $P(B) = 1 - 126 / 495 = 369 / 495 = \mathbf{41/55}$.

18 Nombres à quatre chiffres ★★★

Premier chiffre : 9 choix (1 à 9) ; deuxième : 9 choix (0 à 9 sauf le premier) ; troisième : 8 ; quatrième : 7. Total : $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4\,536$.

Pairs : on sépare selon le dernier chiffre (partition).

- Dernier chiffre 0 : les trois autres sont choisis parmi 9 chiffres non nuls restants, ordonnés : $9 \times 8 \times 7 = 504$.
- Dernier chiffre 2, 4, 6 ou 8 (4 choix) : le premier chiffre a 8 choix (non nul, différent du dernier), le deuxième 8 choix (le 0 est permis, deux chiffres déjà pris), le troisième 7 : $4 \times 8 \times 8 \times 7 = 1\,792$.

Total : $504 + 1\,792 = 2\,296$ nombres pairs.

19 Rangements avec contrainte ★★★

Total : $6! = 720$.

Côte à côte : on traite Ali-Bea comme un bloc. Il y a 5 objets à ranger ($5! = 120$ façons) et 2 ordres internes (Ali-Bea ou Bea-Ali) : $2 \times 120 = 240$.

Non côte à côte : $720 - 240 = 480$ (complémentaire).

20 Chemins sur un quadrillage ★★★

- Un chemin comporte 5 pas D et 3 pas H : position des 3 pas H parmi 8 : $C(8, 3) = 56$.
- De A à M : 2 D et 1 H, soit $C(3, 1) = 3$ chemins. De M à B : 3 D et 2 H, soit $C(5, 2) = 10$ chemins. Principe multiplicatif : $3 \times 10 = 30$.
- $P = 30 / 56 = \mathbf{15/28}$.

21 Probabilité d'un carré au poker ★★★

On choisit la hauteur du carré (8 façons), puis la cinquième carte parmi les 28 autres : $8 \times 28 = 224$ mains. Une main ne peut contenir deux carrés (cela ferait 8 cartes). Total : $C(32, 5) = 201\,376$.

$P = 224 / 201\,376 = \mathbf{1/899}$ (car $224 \times 899 = 201\,376$).