

Dénombrement

Cours de maths - Terminale

Combien de codes de carte bancaire existe-t-il ? De combien de façons peut-on former une équipe de 5 joueurs parmi 12 ? Combien de mains différentes au poker ? Le **dénombrement** est l'art de compter sans énumérer un à un. En Terminale, c'est l'outil indispensable pour calculer des probabilités en situation d'équiprobabilité, et il prépare la loi binomiale. Prends ton temps : la difficulté n'est pas le calcul, c'est de choisir le bon modèle (ordre ou non, répétition ou non).

1. Ensembles finis et cardinal

Cardinal

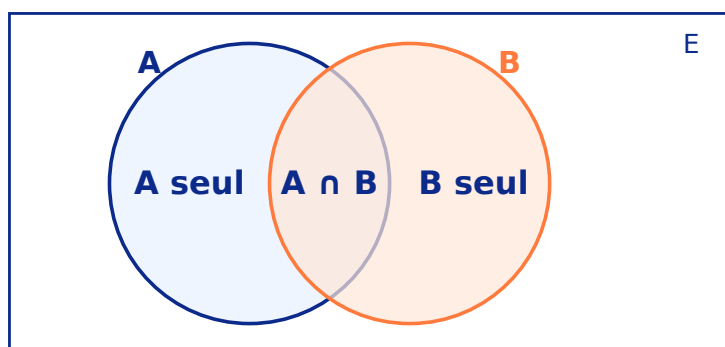
Un ensemble E est fini s'il a un nombre fini d'éléments. Ce nombre est son **cardinal**, noté $\text{Card}(E)$ ou $|E|$. Le cardinal de l'ensemble vide $\emptyset$ est 0.

Pour deux parties A et B d'un ensemble E , on rappelle : la **réunion** $A \cup B$ (éléments de A ou de B), l'**intersection** $A \cap B$ (éléments à la fois dans A et dans B), et le **complémentaire** de A dans E , noté $\bar{A}$ (éléments de E qui ne sont pas dans A). Deux ensembles sont **disjoints** si $A \cap B = \emptyset$.

Cardinal d'une réunion

- Si A et B sont disjoints : $|A \cup B| = |A| + |B|$ (principe additif).
- En général : $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
- Complémentaire : $|\bar{A}| = |E| - |A|$.

Démonstration. Dans $|A| + |B|$, les éléments de $A \cap B$ sont comptés deux fois : on les retire une fois pour obtenir $|A \cup B|$. Pour le complémentaire, E est la réunion disjointe de A et $\bar{A}$, donc $|E| = |A| + |\bar{A}|$.



Exemple résolu

Dans un club de 30 adhérents, 17 pratiquent le tennis, 12 le badminton et 5 les deux. Combien pratiquent au moins un de ces sports ? Aucun ?

$|T \cup B| = 17 + 12 - 5 = 24$ adhérents pratiquent au moins un des deux sports. Aucun : $30 - 24 = 6$.

Partition

Les parties $A_1, \dots, A_p$ forment une **partition** de E si elles sont non vides, deux à deux disjointes, et si leur réunion est E . Alors $|E| = |A_1| + \dots + |A_p|$. C'est la technique des « cas séparés » : on découpe un problème en cas qui ne se chevauchent pas, puis on additionne.

2. Produit cartésien et k-uplets

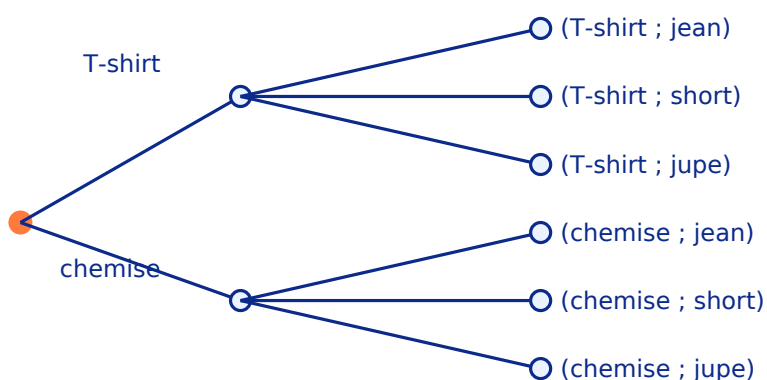
Produit cartésien

Le produit cartésien de deux ensembles E et F est l'ensemble $E \times F$ des couples $(x ; y)$ avec $x \in E$ et $y \in F$. Plus généralement, $E_1 \times \dots \times E_k$ est l'ensemble des **k-uplets** $(x_1 ; \dots ; x_k)$ avec $x_i \in E_i$. Dans un k-uplet, l'**ordre compte** et les éléments peuvent se répéter.

Principe multiplicatif

$|E_1 \times \dots \times E_k| = |E_1| \times \dots \times |E_k|$. En particulier, le nombre de k-uplets d'un ensemble E à n éléments est n^k .

Pourquoi ? Si l'on choisit d'abord x_1 (n_1 façons) puis x_2 (n_2 façons, quel que soit x_1), on obtient $n_1 \times n_2$ couples : l'arbre ci-dessous le montre.



Exemple résolu

Un cadenas a 4 molettes numérotées de 0 à 9. Un code est un 4-uplet de $\{0 ; \dots ; 9\}$: il y a $10^4 = 10\,000$ codes possibles.

Piège

Le principe multiplicatif exige que le nombre de choix à une étape ne dépende pas du résultat des étapes précédentes. Sinon, on le fait varier étape par étape (voir les arrangements) ou on sépare en cas.

3. Arrangements et permutations

Factorielle

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$, et par convention $0! = 1$. Ainsi $5! = 120$ et $7! = 5\,040$.

Arrangement

Un **arrangement** de k éléments d'un ensemble E à n éléments est un k -uplet d'éléments **deux à deux distincts** de E ($0 \leq k \leq n$). L'ordre compte, pas de répétition.

Nombre d'arrangements

Le nombre d'arrangements de k éléments parmi n est $n \times (n - 1) \times \dots \times (n - k + 1) = n! / (n - k)!$. On le note A_n^k .

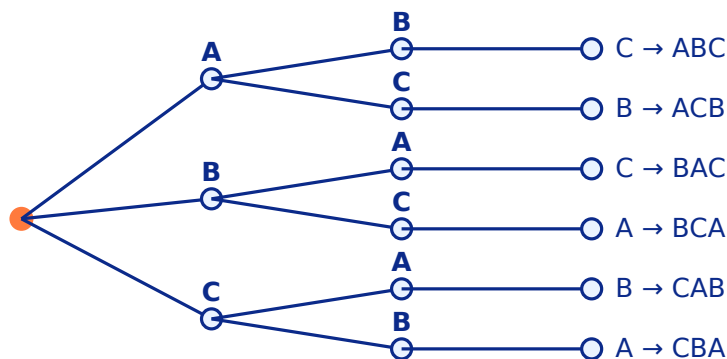
En effet : n choix pour le premier élément, $n - 1$ pour le deuxième (il doit être différent), ..., $n - k + 1$ pour le k -ième.

Exemple résolu

Dans une course de 12 coureurs, combien de podiums (1er, 2e, 3e) existe-t-il ? On choisit 3 coureurs distincts dans un ordre précis : $A_{12}^3 = 12 \times 11 \times 10 = 1\,320$.

Permutation

Une **permutation** de E (n éléments) est un arrangement des n éléments, c'est-à-dire une façon de ranger tous les éléments dans un ordre. Il y en a **$n!$** .



Les 3 lettres A, B, C se rangent de $3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$ façons, comme le montre l'arbre.

Anagrammes avec lettres répétées

Si un mot de n lettres contient la lettre répétée a fois, une autre b fois, etc., le nombre d'anagrammes distinctes est $n! / (a! \times b! \times \dots)$. Exemple : « SOLEIL » (6 lettres dont deux L) donne $6! / 2! = 360$ anagrammes.

4. Combinaisons et coefficients binomiaux

Combinaison

Une **combinaison** de k éléments de E (n éléments) est une **partie** de E à k éléments : l'ordre ne compte pas, et il n'y a pas de répétition. Le nombre de ces parties est le **coefficient binomial** « k parmi n », noté $\binom{n}{k}$ ou C_n^k . On écrira ici **C(n, k)**.

Formule

Pour $0 \leq k \leq n$: $C(n, k) = A_n^k / k! = n! / (k! \times (n - k)!)$.

Démonstration. Chaque partie à k éléments peut être rangée dans $k!$ ordres différents. Il y a donc $k!$ fois plus d'arrangements que de combinaisons : $A_n^k = k! \times C(n, k)$.

Exemple résolu

Choisir 3 délégués dans une classe de 25 : $C(25, 3) = (25 \times 24 \times 23) / (3 \times 2 \times 1) = 2\,300$. Si les trois délégués avaient des rôles distincts (président, secrétaire, trésorier), ce serait un arrangement : 13 800.

Valeurs et symétrie

- $C(n, 0) = C(n, n) = 1$; $C(n, 1) = C(n, n - 1) = n$.

- **Symétrie** : $C(n, k) = C(n, n - k)$. (Choisir les k éléments qu'on prend revient à choisir les $n - k$ qu'on laisse.)

Calcul à la main

Pour $C(10, 7)$, utilise la symétrie : $C(10, 7) = C(10, 3) = (10 \times 9 \times 8) / 6 = 120$. On simplifie toujours avant de multiplier.

5. Triangle de Pascal et formule du binôme

Relation de Pascal

Pour $1 \leq k \leq n - 1$: $C(n, k) = C(n - 1, k - 1) + C(n - 1, k)$.

Démonstration. Fixons un élément a de E (n éléments). Les parties à k éléments se séparent en deux cas disjoints : celles qui contiennent a (on choisit les $k - 1$ autres parmi $n - 1$: $C(n - 1, k - 1)$) et celles qui ne contiennent pas a (on choisit k éléments parmi $n - 1$: $C(n - 1, k)$). On additionne : principe additif.

Cette relation permet de construire le **triangle de Pascal** : chaque nombre est la somme des deux nombres au-dessus de lui. La ligne n contient les $C(n, k)$ pour k de 0 à n .

Pascal's Triangle illustrating the relationship between binomial coefficients:

n	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

The diagram shows how each entry is the sum of the two entries directly above it. For example, at $n=5$, $\binom{5}{1} = 5$ and $\binom{5}{2} = 10$. At $n=6$, $\binom{6}{2} = 15$.

Sur la figure, $15 = 5 + 10 : C(6, 2) = C(5, 1) + C(5, 2)$.

Formule du binôme de Newton

Pour tous réels a et b et tout entier n : $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C(n, k) a^k b^{n-k}$. Les coefficients sont ceux de la ligne n du triangle.

Exemple résolu

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \text{ (ligne 4 : 1, 4, 6, 4, 1).}$$

6. Parties d'un ensemble

Nombre de parties

Un ensemble à n éléments possède 2^n parties ($\emptyset$ et E compris). En d'autres termes : $\sum_{k=0}^n C(n, k) = 2^n$.

Démonstration. Pour former une partie, chaque élément est soit pris, soit non pris : 2 choix par élément, donc $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$ (principe multiplicatif). D'autre part, en regroupant les parties selon leur nombre d'éléments k , on trouve $C(n, k)$ parties de chaque taille, d'où la somme. On retrouve aussi ce résultat avec le binôme pour $a = b = 1$.

Exemple résolu

Pour $E = \{a ; b ; c\}$: $2^3 = 8$ parties : $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a ; b\}$, $\{a ; c\}$, $\{b ; c\}$, E . Ligne 3 du triangle : $1 + 3 + 3 + 1 = 8$.

Parties de taille paire

Avec $a = 1$ et $b = -1$ dans le binôme : $\sum (-1)^k C(n, k) = 0$, donc les parties de taille paire et de taille impaire sont aussi nombreuses : 2^{n-1} chacune (pour $n \geq 1$).

7. Méthode : résoudre un problème de dénombrement

Les quatre questions à se poser

1. Que compte-t-on exactement ? Définis l'objet (un mot, un tirage, une main, un chemin...).
2. L'**ordre** compte-t-il ?
3. Y a-t-il des **répétitions** possibles (avec remise) ?
4. Le problème se décompose-t-il en **étapes successives** (produit) ou en **cas disjoints** (somme) ?

Ordre	Répétition	Modèle	Nombre (n éléments, k choisis)
oui	oui	k-uplet	n^k
oui	non	arrangement	$n ! / (n - k) !$
oui	non ($k = n$)	permutation	$n !$
non	non	combinaison	$C(n, k)$

Exemple résolu : « au moins un »

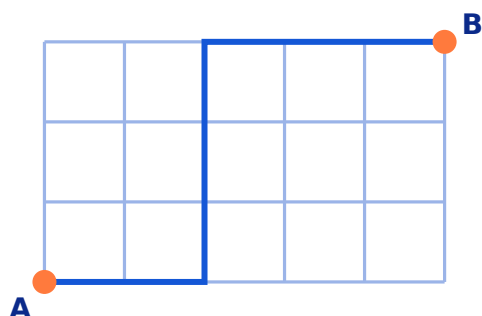
Un sac contient 9 jetons dont 4 rouges. On tire simultanément 3 jetons. Combien de tirages contiennent au moins un jeton rouge ? Total : $C(9, 3) = 84$. Sans aucun rouge (3 jetons parmi les 5 non rouges) : $C(5, 3) = 10$. Donc $84 - 10 = 74$ tirages.

Exemple résolu : cas disjoints

Choisir 3 personnes parmi 5 femmes et 4 hommes avec exactement 2 femmes : $C(5, 2) \times C(4, 1) = 10 \times 4 = 40$ (deux étapes : on choisit les femmes, puis l'homme).

Pièges classiques

- « Tirage simultané » ou « sans ordre » : combinaison. « Tirages successifs » : l'ordre compte (arrangement sans remise, n^k avec remise).
- Ne **jamais** additionner des cas qui se chevauchent : vérifie qu'ils sont disjoints.
- « Au moins un » : pense au complémentaire (« aucun »).



Exemple : chemins sur un quadrillage

On va de A à B en ne faisant que des pas vers la droite (D) ou vers le haut (H). Sur un quadrillage de 5 colonnes et 3 lignes, tout chemin comporte 5 D et 3 H, soit 8 pas ; il est déterminé par la position des 3 pas H parmi les 8 : $C(8, 3) = 56$ chemins.

8. Lien avec les probabilités

Équiprobabilité

Si l'univers Ω est fini et que toutes les issues sont équiprobables, la probabilité d'un événement A est $P(A) = |A| / |\Omega| = (\text{nombre de cas favorables}) / (\text{nombre de cas possibles})$.

Exemple résolu

On tire simultanément 2 cartes d'un jeu de 32. Probabilité d'obtenir deux as ? Univers : $C(32, 2) = 496$ mains. Cas favorables : $C(4, 2) = 6$. $P = 6 / 496 = \mathbf{3/248}$.

Dans ce chapitre, le travail consiste donc à bien compter $|A|$ et $|\Omega|$ avec le **même modèle** : si tu comptes l'univers avec l'ordre, compte les cas favorables avec l'ordre aussi (ou, dans les deux, sans ordre).

Cohérence

Pour deux dés discernables, les 36 couples sont équiprobables, mais pas les 21 sommes ni les 21 « paires non ordonnées » : les doubles sont deux fois moins probables que les autres paires.

9. Dénumérer avec Python

Le module **math** fournit factorial, comb et perm ; le module **itertools** génère et permet de vérifier les listes.

```
from math import factorial, comb, perm
from itertools import combinations, permutations, product

print(factorial(5))                # 120
print(perm(12, 3))                 # 1320 arrangements
print(comb(8, 3))                 # 56 combinaisons
print(len(list(product(range(10), repeat=4)))) # 10000 codes
print(len(list(combinations(range(6), 3))))   # 20 parties à
3 éléments
print(len(set(permutations("SOLEIL"))))      # 360
anagrammes
```

Pour programmer la relation de Pascal, on peut construire une ligne à partir de la précédente :

```
def ligne_suivante(L):
    return [1] + [L[i] + L[i + 1] for i in range(len(L) - 1)] +
[1]

L = [1]
for n in range(6):
    L = ligne_suivante(L)
```

```
print(L)          # [1, 6, 15, 20, 15, 6, 1]
```

Mathbot, le robot-coach

Quand tu hésites sur ton calcul, vérifie avec une petite version du problème (3 ou 4 éléments) : liste tout à la main, puis compare avec ta formule. Si ça marche en petit, ça marchera en grand !

À retenir

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$; $|\bar{A}| = |E| - |A|$.
- Principe multiplicatif : on multiplie les nombres de choix d'étapes successives ; k-uplets d'un ensemble à n éléments : n^k .
- Arrangements (ordre, sans répétition) : $n! / (n - k)!$; permutations : $n!$.
- Combinaisons (sans ordre) : $C(n, k) = n! / (k! (n - k)!) ;$ symétrie $C(n, k) = C(n, n - k)$.
- Pascal : $C(n, k) = C(n - 1, k - 1) + C(n - 1, k)$; binôme : $(a + b)^n = \sum C(n, k) a^k b^{n-k}$.
- Un ensemble à n éléments a 2^n parties ; $\sum C(n, k) = 2^n$.
- Équiprobabilité : $P(A) = |A| / |\Omega|$, avec un modèle de comptage cohérent.
- « Au moins un » : passer par le complémentaire.