

Dérivation, composée et convexité

Contrôle de maths - Terminale

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice interdite.

1 Dérivées de composées / 4 pts

Dérive chacune des fonctions sur l'intervalle indiqué :

- a. $f(x) = (4x - 1)^5$ sur $\mathbb{R}$
- b. $g(x) = e^{-3x+1}$ sur $\mathbb{R}$
- c. $h(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ sur $\mathbb{R}$
- d. $k(x) = (2x + 5)e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$

2 Étude d'une fonction (calculatrice autorisée) / 6 pts

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 - x)e^x$. On admet que $f(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow -\infty$.

- a. Montre que $f'(x) = -xe^x$.
- b. Étudie le sens de variation de f , calcule la limite de f en $+\infty$ et dresse le tableau de variations.
- c. Montre que $f''(x) = -(x + 1)e^x$ et étudie la convexité de f .
- d. Justifie que la courbe admet un point d'inflexion A, donne ses coordonnées exactes et une équation de la tangente en A.

3 Lecture d'une dérivée / 4 pts

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[-3 ; 5]$. Sa dérivée f' est croissante sur $[-3 ; 0]$ de -2 à 1 , décroissante sur $[0 ; 3]$ de 1 à -3 , croissante sur $[3 ; 5]$ de -3 à 2 .

- a. Donne les intervalles de convexité et de concavité de f .
- b. Quelles sont les abscisses des points d'inflexion de la courbe de f ?
- c. Combien l'équation $f'(x) = 0$ a-t-elle de solutions dans $[-3 ; 5]$? Justifie.
- d. Peut-on affirmer que f est décroissante au voisinage de $x = -3$? Justifie.

4 Optimisation : la canette (calculatrice autorisée) / 4 pts

On fabrique une canette cylindrique, sans épaisseur, de volume 330 cm^3 , de rayon $r \text{ cm}$ et de hauteur $h \text{ cm}$. On cherche r qui minimise la quantité de métal, c'est-à-dire l'aire totale S .

- a. Exprime h en fonction de r , puis montre que $S(r) = 2\pi r^2 + \mathbf{660/r}$ pour $r > 0$.
- b. Calcule $S'(r)$ et montre qu'elle s'annule pour $r^3 = \mathbf{165/\pi}$.
- c. Justifie que S admet un minimum en cette valeur de r (étudie S''), puis donne r et h arrondis au centième.

5 Une inégalité par convexité / 2 pts

1. Justifie que pour tout réel t , $e^t \geq t + 1$.
2. En déduire que, pour tout réel $x < 1$, $e^x \leq \mathbf{1/1-x}$.