

# Dérivation, composée et convexité

## Corrigé du contrôle - Terminale

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice interdite.

### 1 Dérivées de composées / 4 pts

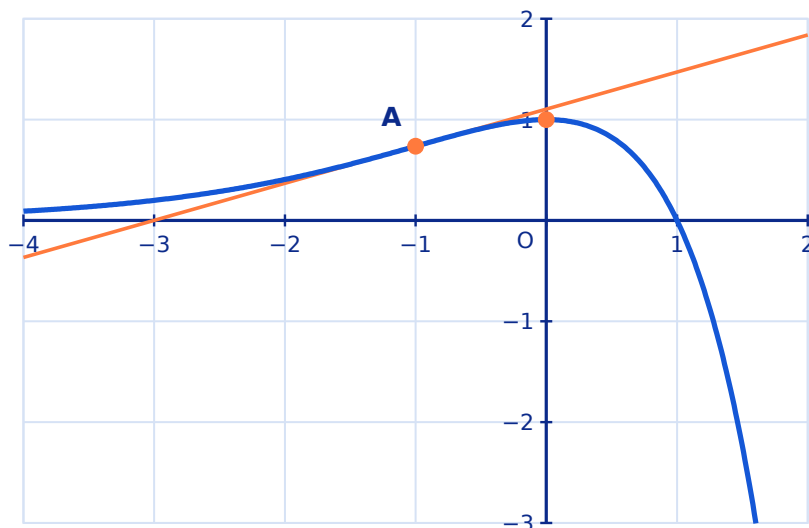
- a.  $f(x) = 5 \times 4 \times (4x - 1)^4 = 20(4x - 1)^4$ . (1 pt)
- b.  $g'(x) = -3e^{-3x+1}$ . (1 pt)
- c.  $x^2 - 2x + 5 = (x - 1)^2 + 4 > 0$ , donc  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $h'(x) = 2x - 2/2\sqrt{(x^2 - 2x + 5)} = x - 1/\sqrt{(x^2 - 2x + 5)}$ . (1 pt)
- d.  $K'(x) = 2e^{2x} + (2x + 5) \times 2e^{2x} = (4x + 12)e^{2x} = 4(x + 3)e^{2x}$ . (1 pt)

### 2 Étude d'une fonction (calculatrice autorisée) / 6 pts

- a.  $f(x) = -e^x + (1 - x)e^x = -xe^x$ . (1 pt)
- b.  $e^x > 0$  :  $f$  a le signe de  $-x$ .  $f$  croît sur  $]-\infty ; 0]$ , décroît sur  $[0 ; +\infty[$  ; maximum  $f(0) = 1$ . En  $+\infty$ ,  $1 - x \rightarrow -\infty$  et  $e^x \rightarrow +\infty$ , donc  $f(x) \rightarrow -\infty$ . (1,5 pt : 0,5 sens, 0,5 limite, 0,5 tableau)

| $x$    | $-\infty$ |   | 0 |   | $+\infty$ |
|--------|-----------|---|---|---|-----------|
| $f(x)$ |           | + | 0 | - |           |
| $f$    | 0         | ↗ | 1 | ↘ | $-\infty$ |

- c.  $f''(x) = -e^x - xe^x = -(x + 1)e^x$ .  $f'' > 0 \Leftrightarrow x < -1$  :  $f$  est convexe sur  $]-\infty ; -1]$  et concave sur  $[-1 ; +\infty[$ . (1,5 pt)
- d.  $f''$  s'annule en  $-1$  en changeant de signe : point d'inflexion **A(-1 ; 2e<sup>-1</sup>)** (car  $f(-1) = 2e^{-1} \approx 0,74$ ).  $f(-1) = e^{-1}$ . Tangente :  $y = e^{-1}(x + 1) + 2e^{-1} = e^{-1}(x + 3)$ . (2 pts : 1 justification, 0,5 coordonnées, 0,5 tangente)



### 3 Lecture d'une dérivée / 4 pts

- $f$  est convexe là où  $f$  croît : sur  $[-3 ; 0]$  et sur  $[3 ; 5]$  ; concave là où  $f$  décroît : sur  $[0 ; 3]$ . (1 pt)
- La convexité change en 0 et en 3 : points d'inflexion d'abscisses **0** et **3**. (1 pt)
- Sur chacun des trois intervalles,  $f$  est continue et strictement monotone. Sur  $[-3 ; 0]$  elle passe de  $-2$  à  $1$  : une solution (théorème des valeurs intermédiaires, 0 est entre  $-2$  et  $1$ ). Sur  $[0 ; 3]$  elle passe de  $1$  à  $-3$  : une solution. Sur  $[3 ; 5]$  elle passe de  $-3$  à  $2$  : une solution. Il y a donc **3 solutions**. (1,5 pt)
- Oui :  $f(-3) = -2 < 0$  et  $f$  est continue, donc  $f < 0$  au voisinage de  $-3$  :  $f$  est décroissante. (0,5 pt)

### 4 Optimisation : la canette (calculatrice autorisée) / 4 pts

- $V = \pi r^2 h = 330$ , d'où  $h = \mathbf{330/\pi r^2}$ . L'aire totale vaut  $2\pi r^2$  (deux disques) +  $2\pi r h$  (côté) =  $2\pi r^2 + \mathbf{660/r}$ . (1 pt)
- $S'(r) = 4\pi r - \mathbf{660/r^2} = \mathbf{4\pi r^3 - 660/r^2}$ . Elle s'annule pour  $4\pi r^3 = 660$ , soit  $r^3 = \mathbf{165/\pi}$ . (1 pt)
- $S''(r) = 4\pi + \mathbf{1320/r^3} > 0$  :  $S$  est convexe sur  $]0 ; +\infty[$ , donc son minimum est atteint là où  $S' = 0$ . (1 pt)  $r = (165/\pi)^{1/3} \approx \mathbf{3,74 \text{ cm}}$  et  $h = \mathbf{330/\pi r^2} \approx \mathbf{7,49 \text{ cm}}$  (on remarque que  $h = 2r$ ). La surface minimale est environ  $264,4 \text{ cm}^2$ . (1 pt)

### 5 Une inégalité par convexité / 2 pts

- L'exponentielle est convexe sur  $\mathbb{R}$  (dérivée seconde  $e^t > 0$ ) : sa courbe est au-dessus de sa tangente en 0, d'équation  $y = t + 1$ . (1 pt)
- Avec  $t = -x$  :  $e^{-x} \geq 1 - x > 0$  puisque  $x < 1$ . En passant à l'inverse (tout est positif) :  $e^x \leq \mathbf{1/1-x}$ . (1 pt)