

Dérivation, composée et convexité

Corrigé des exercices - Terminale

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Composées avec l'exponentielle ★★★

- On utilise $(e^u)' = u'e^u$ avec $u(x) = 5x - 1$, $u' = 5$: $f'(x) = 5e^{5x-1}$.
- $u(x) = x^2 + 1$, $u'(x) = 2x$: $g'(x) = 2xe^{x^2+1}$.
- $u(x) = -x^2 + 3x$, $u'(x) = -2x + 3$: $h'(x) = (-2x + 3)e^{-x^2+3x}$.
- Le facteur 3 est constant, $u(x) = -2x$, $u' = -2$: $k'(x) = 3 \times (-2)e^{-2x} = -6e^{-2x}$.

2 Composées avec une puissance ★★★

- $(u^4)' = 4u'u^3$ avec $u' = 3$: $f'(x) = 12(3x + 1)^3$.
- $u'(x) = 2x - 1$: $g'(x) = 3(2x - 1)(x^2 - x + 2)^2$.
- $u' = -2$: $h'(x) = 5 \times (-2)(1 - 2x)^4 = -10(1 - 2x)^4$.
- $k(x) = (2x - 1)^{-2}$, $u' = 2$: $k'(x) = -2 \times 2 \times (2x - 1)^{-3} = -4/(2x-1)^3$, bien défini car $2x - 1 > 0$.

3 Composées avec une racine ★★★

- Il faut $2x + 5 > 0$, soit $x > -5/2$: f est dérivable sur $] -5/2 ; +\infty[$ et $f'(x) = 2/2\sqrt{2x+5} = 1/\sqrt{2x+5}$.
- $x^2 + 1 > 0$ pour tout x : dérivable sur $\mathbb{R}$, $g'(x) = 2x/2\sqrt{x^2+1} = x/\sqrt{x^2+1}$.
- Il faut $3 - x > 0$, soit $x < 3$: sur $] -\infty ; 3[$, avec $u' = -1$, $h'(x) = -1/2\sqrt{3-x}$.

4 Vrai ou faux ? ★★★

- Faux.** Il manque la dérivée de l'intérieur : la dérivée est $2xe^{x^2}$.
- Vrai.** $u(x) = x + 1$, $u' = 1$: $3 \times 1 \times (x + 1)^2$.
- Faux.** On a oublié le facteur $u'(x) = 2x$: la dérivée est $2x/2\sqrt{x^2+1} = x/\sqrt{x^2+1}$.
- Vrai.** Sa dérivée est $-e^{-x} < 0$ pour tout réel x .

5 Dérivée seconde et inflexion ★★★

- $f(x) = 3x^2 - 12x$ et $f''(x) = 6x - 12$.
- $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. Donc f est concave sur $] -\infty ; 2]$ et convexe sur $[2 ; +\infty[$.
- f'' s'annule en 2 en changeant de signe : il y a un point d'inflexion d'abscisse 2,

d'ordonnée $f(2) = 8 - 24 + 2 = -14$. Point d'inflexion : **A(2 ; -14)**.

6 Lire un tableau de variations de f ★★★

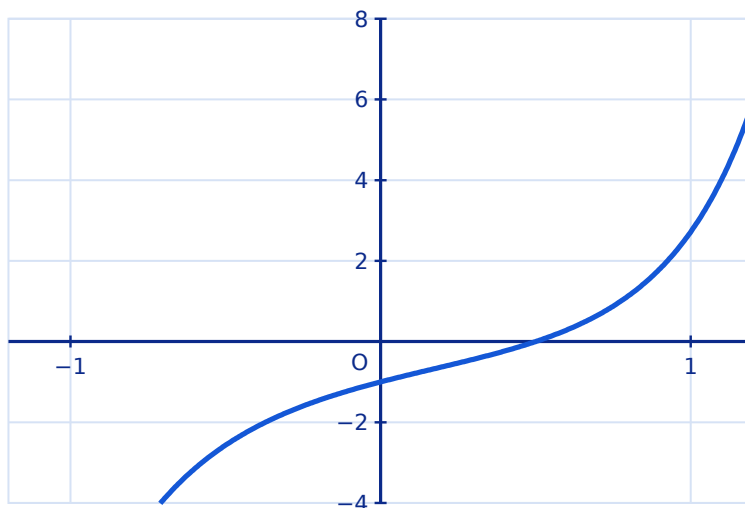
- a. f est convexe là où f' est croissante : sur $]-\infty ; -1]$ et sur $[2 ; +\infty[$. Elle est concave là où f' est décroissante : sur $[-1 ; 2]$.
- b. La convexité change en -1 et en 2 : la courbe a **deux points d'inflexion**, d'abscisses -1 et 2 .
- c. $f(2) = -1 < 0$ et f' est continue : $f' < 0$ au voisinage de 2 donc f est décroissante au voisinage de 2 .

7 Convexité des fonctions de référence ★★★

- a. $f''(x) = 12x^2 \geq 0$: **convexe sur $\mathbb{R}$** .
- b. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{1}{2}x^{-1/2}$, $f'(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2} < 0$: **concave sur $]0 ; +\infty[$** .
- c. $f(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f'(x) = \frac{2}{x^3}$: positive pour $x > 0$ (**convexe sur $]0 ; +\infty[$**), négative pour $x < 0$ (**concave sur $]-\infty ; 0[$**).

8 Une fonction toujours croissante ★★★

- a. $f(x) = 2e^{x^2} + (2x - 1) \times 2xe^{x^2} = (2 + 4x^2 - 2x)e^{x^2} = \mathbf{2(2x^2 - x + 1)e^{x^2}}$.
- b. Le trinôme $2x^2 - x + 1$ a pour discriminant $1 - 8 = -7 < 0$: il est strictement positif (signe de $a = 2$). Avec $e^{x^2} > 0$, on a $f' > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- c. $f(0) = -1$ et $f'(0) = 2$: **$y = 2x - 1$** .



9 Un minimum pour une puissance ★★★

- a. $g'(x) = 3 \times 2x \times (x^2 + 1)^2 = 6x(x^2 + 1)^2$. Le facteur $(x^2 + 1)^2$ est strictement positif : g' a le signe de x . g décroît sur $]-\infty ; 0]$, croît sur $[0 ; +\infty[$; minimum $g(0) = 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		–	0	+	
g	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

- b. $g''(x) = 6(x^2 + 1)^2 + 6x \times 2 \times 2x(x^2 + 1) = 6(x^2 + 1)[(x^2 + 1) + 4x^2] = 6(x^2 + 1)(5x^2 + 1) > 0$. **g est convexe sur $\mathbb{R}$.**

10 Une racine dans un produit ★★★

- a. $h'(x) = \sqrt{x+1} + x \times \frac{1}{2}\sqrt{x+1} = \frac{2(x+1) + x}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$.
b. Le dénominateur est positif : h' a le signe de $3x + 2$, qui s'annule en $-2/3$. h décroît sur $] -1 ; -2/3]$ puis croît. Minimum : $h(-2/3) = -2/3 \times \sqrt{1/3} = -2/3\sqrt{3} = -2\sqrt{3}/9 \approx -0,385$.

x	-1		-2/3		$+\infty$
$h'(x)$		–	0	+	
h	0	$\searrow$	$\approx -0,385$	$\nearrow$	$+\infty$

- c. Sur $] -1 ; +\infty[$, $3x + 4 > 1 > 0$ et le dénominateur est positif : $h'' > 0$. **h est convexe sur $] -1 ; +\infty[$.**

11 Une courbe qui s'aplatit ★★★

- a. $f(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x}$. $f'(x) = -e^{-x} - (1 - x)e^{-x} = (x - 2)e^{-x}$.
b. $f > 0 \Leftrightarrow x < 1$: f croît sur $] -\infty ; 1]$, décroît sur $[1 ; +\infty[$; maximum $f(1) = e^{-1}$. $f' > 0 \Leftrightarrow x > 2$: f est concave sur $] -\infty ; 2]$, convexe sur $[2 ; +\infty[$.
c. Inflexion en $x = 2$: $f(2) = 2e^{-2}$ et $f'(2) = -e^{-2}$. Tangente : $y = -e^{-2}(x - 2) + 2e^{-2} = e^{-2}(4 - x)$.

12 Quatre degrés, deux inflexions ★★★

$$f(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x = 4x(x^2 - 6x + 9) = 4x(x - 3)^2. \quad f'(x) = 12x^2 - 48x + 36 = 12(x^2 - 4x + 3) = \mathbf{12(x - 1)(x - 3)}.$$

f' est positive à l'extérieur des racines 1 et 3 : f est convexe sur $] -\infty ; 1]$, concave sur $[1 ; 3]$, convexe sur $[3 ; +\infty[$.

f' change de signe en 1 et en 3 : points d'inflexion **A(1 ; 11)** et **B(3 ; 27)** (car $f(1) = 1 - 8 + 18 = 11$ et $f(3) = 81 - 216 + 162 = 27$).

13 Une inégalité par la convexité ★★★

1. La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ (sa dérivée seconde, e^x , est positive). Sa courbe est donc au-dessus de sa tangente en 0, d'équation $y = e^0(x - 0) + e^0 = x + 1$.

2. On applique l'inégalité avec le réel $-x^2$ à la place de x : $e^{-x^2} \geq -x^2 + 1$.

3. Avec $-x$ à la place de x : $e^{-x} \geq 1 - x$. Pour $x < 1$, le réel $1 - x$ est strictement positif ; les deux membres sont positifs, donc en passant à l'inverse l'inégalité s'inverse : $e^x = 1/\exp(-x) \leq 1/1-x$.

14 Tangente qui traverse la courbe ★★★

- a. $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$ et $f'(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$, qui change de signe en 1 uniquement. $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$: **A(1 ; 0)**.
- b. $f(1) = 3 - 6 + 2 = -1$. T : $y = -(x - 1) + 0 = -x + 1$.
- c. $(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ et $f(x) + x - 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$: l'égalité est vérifiée. Pour $x < 1$, $(x - 1)^3 < 0$: la courbe est **en dessous** de T ; pour $x > 1$ elle est **au-dessus**. La courbe traverse sa tangente en A, ce qui est typique d'un point d'inflexion.

15 La boîte de volume maximal ★★★

- a. Les côtés restants valent $30 - 2x$ et $20 - 2x$: il faut $x > 0$ et $20 - 2x > 0$, donc $x \in]0 ; 10[$.
- b. La hauteur est x , la base mesure $(30 - 2x)$ sur $(20 - 2x)$: $V(x) = x(30 - 2x)(20 - 2x) = x(600 - 100x + 4x^2) = 4x^3 - 100x^2 + 600x$.
- c. $V'(x) = 12x^2 - 200x + 600 = 4(3x^2 - 50x + 150)$. Discriminant $2\,500 - 1\,800 = 700$: racines **50 - 10√7/6 = 25 - 5√7/3** $\approx 3,92$ et **25 + 5√7/3** $\approx 12,74$ (hors de $]0 ; 10[$). $V' > 0$ sur $]0 ; 3,92[$ et $V' < 0$ sur $]3,92 ; 10[$.

x	0		3,92		10
V'(x)		+	0	-	
V	0	↗	$\approx 1\,056$	↘	0

- d. Le volume est maximal pour $x = 25 - 5\sqrt{7}/3 \approx 3,92$ cm, et vaut $V(3,92) \approx 1\,056$ cm³.

16 Étude complète ★★★

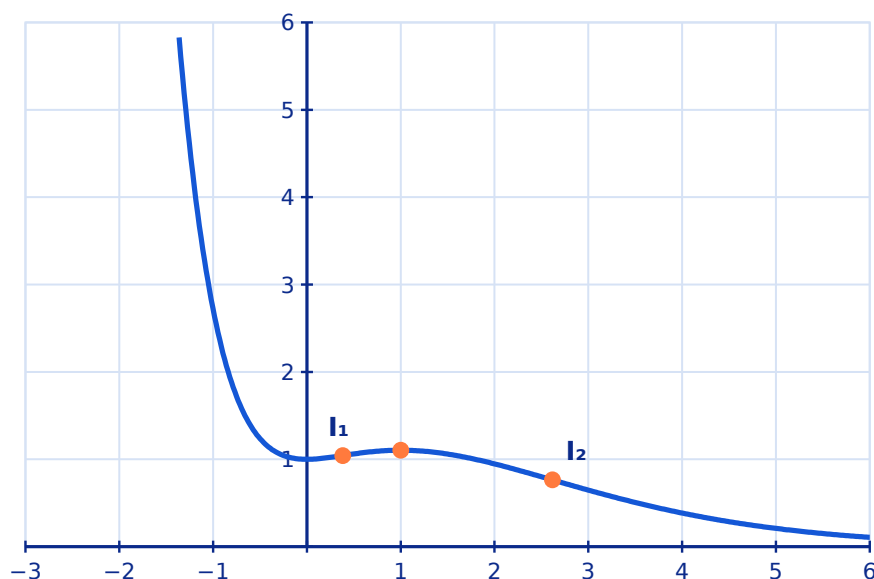
1. $f(x) = (2x + 1)e^{-x} - (x^2 + x + 1)e^{-x} = (-x^2 + x)e^{-x} = -x(x - 1)e^{-x}$. Puis $f'(x) = (-2x + 1)e^{-x} - (-x^2 + x)e^{-x} = (x^2 - 3x + 1)e^{-x}$.

2. En $-\infty$, $x^2 + x + 1 \rightarrow +\infty$ et $e^{-x} \rightarrow +\infty$ donc $f(x) \rightarrow +\infty$. f a le signe de $-x(x - 1)$: négatif sur $]-\infty ; 0[$, positif sur $]0 ; 1[$, négatif sur $]1 ; +\infty[$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	0	-	
f	$+\infty$	↘	1	↗	$3/e \approx 1,10$	↘	0

3. Le trinôme $x^2 - 3x + 1$ a pour discriminant 5 et pour racines $a = 3 - \sqrt{5}/2 \approx 0,38$ et $b = 3 + \sqrt{5}/2 \approx 2,62$. f est convexe sur $] -\infty ; a]$, concave sur $[a ; b]$, convexe sur $[b ; +\infty[$. Deux points d'inflexion, d'abscisses a et b , d'ordonnées $\approx 1,04$ et $\approx 0,76$.

4. Voici la courbe :

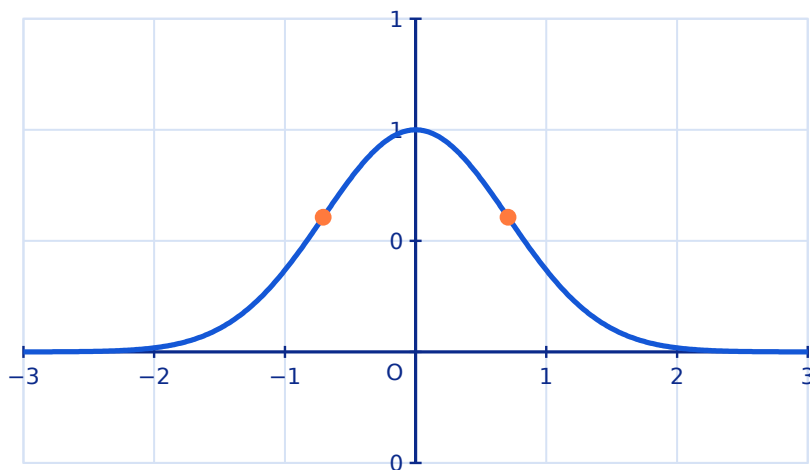


17 Le point le plus proche ★★★

- $AM^2 = (x - 4)^2 + (\sqrt{x} - 0)^2 = x^2 - 8x + 16 + x = x^2 - 7x + 16$.
- Posons $f(x) = x^2 - 7x + 16$. $f'(x) = 2x - 7$ s'annule en $7/2$; f décroît puis croît. Comme la racine carrée est croissante, AM est minimale quand AM^2 l'est. $f(3,5) = 12,25 - 24,5 + 16 = 3,75$. Donc AM minimale $= \sqrt{3,75} = \sqrt{15}/2 \approx 1,94$, atteinte pour $M(3,5 ; \sqrt{3,5})$ avec $\sqrt{3,5} \approx 1,87$.
- $d'(x) = 2x - 7/2\sqrt{x^2 - 7x + 16}$ (le trinôme est toujours positif, discriminant $49 - 64 < 0$). Le dénominateur est positif : d' a le signe de $2x - 7$, ce qui redonne le même minimum en $x = 3,5$.

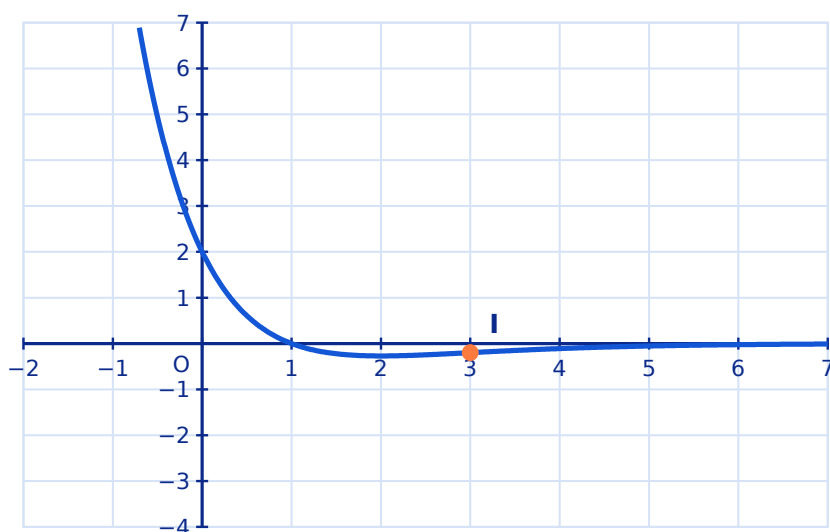
18 La courbe en cloche ★★★

- $f(x) = -2xe^{-x^2}$, positive pour $x < 0$: f croît sur $] -\infty ; 0]$, décroît sur $[0 ; +\infty[$, maximum $f(0) = 1$. $f'(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$.
- f' a le signe de $2x^2 - 1$, qui s'annule en $\pm 1/\sqrt{2} = \pm \sqrt{2}/2$. f est convexe sur $] -\infty ; -\sqrt{2}/2]$, concave sur $[-\sqrt{2}/2 ; \sqrt{2}/2]$, convexe sur $[\sqrt{2}/2 ; +\infty[$. Les deux points d'inflexion ont pour abscisses $\pm \sqrt{2}/2$ et pour ordonnée commune $e^{-1/2} \approx 0,61$.
- Avec $t = -x^2$, $e^{-x^2} \geq -x^2 + 1$.



19 Trouver les paramètres ★★★

- $f(x) = ae^{-x} - (ax + b)e^{-x} = (a - b - ax)e^{-x}$. $f'(x) = -ae^{-x} - (a - b - ax)e^{-x} = (ax + b - 2a)e^{-x}$.
- $f(0) = b = 2$. $f'(3) = 3a + b - 2a = a + b = 0$ donc $a = -2$. **$a = -2$ et $b = 2$** , soit $f(x) = (-2x + 2)e^{-x}$.
- $f(x) = 2(x - 2)e^{-x}$: f décroît sur $]-\infty ; 2]$, croît sur $[2 ; +\infty[$, minimum $f(2) = -2e^{-2} \approx -0,27$. $f'(x) = -2(x - 3)e^{-x}$, positive pour $x < 3$ et négative pour $x > 3$: elle change de signe en 3, c'est bien un point d'inflexion, de coordonnées $(3 ; -4e^{-3})$.



20 Une composée de deux fonctions ★★★

- $e^x + 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$: f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{\exp(x)}{2\sqrt{\exp(x)+1}}$.
- On dérive le quotient : le dénominateur $2\sqrt{e^x+1}$ a pour dérivée $\frac{\exp(x)}{\sqrt{\exp(x)+1}}$. $f'(x) = \frac{(e^x \times 2\sqrt{e^x+1} - e^x \times \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}})}{4(e^x+1)}$; en réduisant, **$f'(x) = \frac{\exp(x)(\exp(x)+2)}{4(\exp(x)+1)\sqrt{\exp(x)+1}}$** , strictement positive. f est convexe sur $\mathbb{R}$.
- $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Tangente : $y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(x + 4)$. f étant convexe, sa courbe est au-dessus de cette tangente : $\sqrt{e^x + 1} \geq \frac{\sqrt{2}}{4}(x + 4)$

4) pour tout réel x .

21 Vrai ou faux avec contre-exemple ★★★

- a. **Faux.** $f(x) = x^2 : f'(0) = 0$, mais 0 est un minimum et la fonction est convexe sur $\mathbb{R}$: pas d'inflexion.
- b. **Faux.** $f(x) = x^4 : f'(0) = 0$ mais $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ ne change pas de signe.
- c. **Faux.** $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$ mais décroissante sur $] -\infty ; 0]$.
- d. **Vrai.** C'est la caractérisation : f convexe $\Leftrightarrow f'$ croissante.
- e. **Vrai.** Si $f' \geq 0$ et $g'' \geq 0$ alors $(f + g)'' = f'' + g'' \geq 0$.