

Dérivation, composée et convexité

Cours de maths - Terminale

Une fonction « composée », c'est une fonction fabriquée à partir d'une autre : on calcule d'abord une expression, puis on lui applique une fonction connue (l'exponentielle, une puissance, une racine). On les rencontre partout : décroissance d'une substance radioactive, courbe en cloche des statistiques, coût d'un emballage. Dans ce chapitre, tu apprends à **dériver ces fonctions composées**, à dériver une deuxième fois, et à t'en servir pour décrire la **courbure** d'une courbe : c'est la **convexité**. À la clé : des études de fonctions complètes et la résolution de problèmes d'**optimisation**.

1. Rappels : dérivation et variations

Voici ce que tu dois maîtriser avant de commencer. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Fonction	Dérivée	Où ?
x^n (n entier naturel non nul)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$1/x$	$-1/x^2$	$] -\infty ; 0[$ et $] 0 ; +\infty[$
$\sqrt{x}$	$1/2\sqrt{x}$	$] 0 ; +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

Opérations sur les dérivées

Pour deux fonctions u et v dérivables et un réel k :

- $(u + v)' = u' + v'$ et $(ku)' = ku'$;
- $(uv)' = u'v + uv'$;
- u/v a pour dérivée $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ là où v ne s'annule pas.

Tangente et variations

- La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
- $f \geq 0$ sur $I \Leftrightarrow f$ croissante sur I ; $f \leq 0$ sur $I \Leftrightarrow f$ décroissante sur I . Si f s'annule en changeant de signe, f admet un extremum local.

Exemple

Pour $f(x) = (x - 1)e^x$: $f'(x) = 1 \times e^x + (x - 1)e^x = xe^x$. Comme $e^x > 0$, $f'(x)$ a le signe de x : f décroît sur $]-\infty ; 0]$, croît sur $[0 ; +\infty[$ et son minimum est $f(0) = -1$.

2. Dériver une fonction composée

Prenons $g(x) = e^{3x+1}$. Pour calculer $g'(x)$, on calcule d'abord $3x + 1$ (c'est la fonction v), puis on applique l'exponentielle (c'est la fonction u). On écrit $g = u \circ v$ (« u rond v ») et $g'(x) = u'(v(x)) \times v'(x)$.

Théorème : dérivée d'une composée

Si v est dérivable sur un intervalle I et si u est dérivable sur un intervalle contenant toutes les valeurs $v(x)$, alors $u \circ v$ est dérivable sur I et, pour tout x de I :

$$(u \circ v)'(x) = v'(x) \times u'(v(x)).$$

En clair : on dérive « l'intérieur », puis on multiplie par la dérivée de la fonction extérieure prise en l'intérieur.

Cas d'une fonction affine à l'intérieur

Si $g(x) = u(ax + b)$, alors $g'(x) = a \times u'(ax + b)$.

On en déduit les quatre formules à connaître. Dans le tableau, u est une fonction dérivable sur I .

Fonction	Dérivée	Condition
e^u	$u' e^u$	—
u^n (n entier, $n \neq 0$)	$n u' u^{n-1}$	$u(x) \neq 0$ si $n < 0$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u(x) > 0$
$\ln u$ (à venir)	$\frac{u'}{u}$	$u(x) > 0$

La dernière ligne concerne la fonction logarithme népérien, que tu étudieras dans un prochain chapitre : retiens simplement qu'elle suit le même schéma « dérivée de l'intérieur ».

Démonstration pour e^u et $\sqrt{u}$

Pour e^u : la fonction extérieure est l'exponentielle, qui est sa propre dérivée. Le théorème donne $(u') \times e^u$. Pour $\sqrt{u}$: la fonction extérieure est la racine carrée, de dérivée $\frac{1}{2\sqrt{t}}$ en $t > 0$. Le théorème donne $u' \times \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$. Pour u^n , la fonction extérieure est $t \mapsto t^n$, de dérivée nt^{n-1} .

Méthode : dériver une composée

1. Repérer la forme : $e^{\dots}$, $(\dots)^n$ ou $\sqrt{(\dots)}$.
2. Isoler l'intérieur u et calculer u' .
3. Appliquer la bonne formule du tableau.
4. Factoriser pour pouvoir étudier le signe.

Exemples résolus

- $f(x) = e^{-3x+2}$: ici $u(x) = -3x + 2$ et $u' = -3$. Donc $f'(x) = -3e^{-3x+2}$.
- $g(x) = (x^2 + x + 1)^4$: $u(x) = x^2 + x + 1$ et $u'(x) = 2x + 1$. Donc $g'(x) = 4(2x + 1)(x^2 + x + 1)^3$.
- $h(x) = \sqrt{x^2 + 3}$: $x^2 + 3 > 0$ pour tout réel x , donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.
- $k(x) = \frac{1}{(2x-1)^2} = (2x-1)^{-2}$ sur $]1/2 ; +\infty[$: $k'(x) = -2 \times 2 \times (2x-1)^{-3} = -4/(2x-1)^3$.

Pièges à éviter

- Oublier de multiplier par u' : la dérivée de e^{x^2} n'est **pas** e^{x^2} , c'est $2xe^{x^2}$.
- Dériver $\sqrt{u}$ sans le 2 au dénominateur, ou sans u' au numérateur.
- Oublier la condition $u(x) > 0$: $\sqrt{u}$ n'est dérivable que là où u est strictement positive.

3. La dérivée seconde

Définition

Quand la fonction dérivée f' est elle-même dérivable sur I , on appelle **dérivée seconde** de f la fonction notée f'' : $f'' = (f')'$.

Interprétation : $f'(x)$ est la pente de la tangente ; $f''(x)$ mesure donc la *vitesse à laquelle cette pente change*. Si $f'' > 0$, la pente augmente quand on avance vers la droite ; si $f'' < 0$, elle diminue.

Exemples

- $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$: $f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$, puis $f''(x) = 6x - 4$.
- $f(x) = (x+1)e^{-x}$: $f'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = -xe^{-x}$, puis $f''(x) = -e^{-x} + xe^{-x} = (x-1)e^{-x}$.

Dans le deuxième exemple, on a dérivé e^{-x} avec la formule de la composée : $(e^{-x})' = -e^{-x}$.

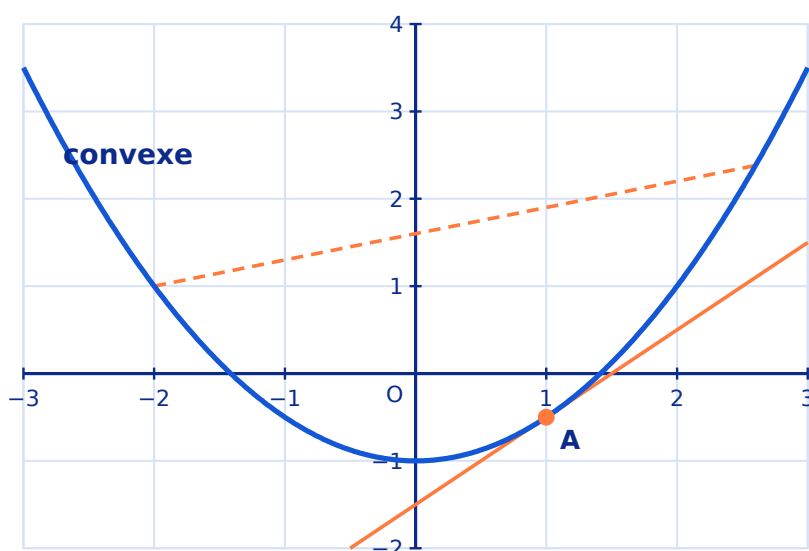
4. Convexité et concavité

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- f est **convexe** sur I si sa courbe est située **au-dessus de chacune de ses tangentes** ;
- f est **concave** sur I si sa courbe est située **en dessous de chacune de ses tangentes**.

De façon équivalente : f est convexe si, pour deux points quelconques de la courbe, le segment qui les relie (la corde) est au-dessus de la courbe.



Sur la figure, la courbe de $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 1$ est au-dessus de sa tangente en A (en orange, trait plein) et en dessous de la corde (en orange, pointillés) : elle est convexe. Imagine une cuvette (convexe) ou une colline (concave).

Théorème (admis) : caractérisation par f' et f''

Soit f deux fois dérivable sur I .

- f est convexe sur $I \Leftrightarrow f'$ est croissante sur $I \Leftrightarrow f'' \geq 0$ sur I ;
- f est concave sur $I \Leftrightarrow f'$ est décroissante sur $I \Leftrightarrow f'' \leq 0$ sur I .

Fonctions de référence : x^2 est convexe sur $\mathbb{R}$; e^x est convexe sur $\mathbb{R}$; $\sqrt{x}$ est concave sur $]0 ; +\infty[$ (car $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$) ; $\frac{1}{x}$ est convexe sur $]0 ; +\infty[$ et concave sur $] -\infty ; 0[$; x^3 est concave sur $] -\infty ; 0[$ et convexe sur $]0 ; +\infty[$.

Méthode : étudier la convexité d'une fonction

1. Calculer f' puis f'' et la mettre sous forme factorisée.
2. Étudier le signe de f'' (tableau de signes).
3. Conclure : $f'' \geq 0 \rightarrow$ convexe ; $f'' \leq 0 \rightarrow$ concave.

Exemple résolu

Pour $f(x) = (x + 1)e^{-x}$, on a trouvé $f'(x) = (x - 1)e^{-x}$. Comme $e^{-x} > 0$, f' a le signe de $x - 1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		–	0	+	
Convexité		concave		convexe	

La fonction f est concave sur $] -\infty ; 1]$ et convexe sur $[1 ; +\infty[$.

Ne confonds pas

Convexe ne veut pas dire croissante ! La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe mais elle décroît sur $] -\infty ; 0]$. La convexité parle de la *forme* de la courbe, le sens de variation du *signe* de f' .

5. Point d'inflexion

Définition

Un **point d'inflexion** est un point de la courbe où la **convexité change** : la courbe y traverse sa tangente.

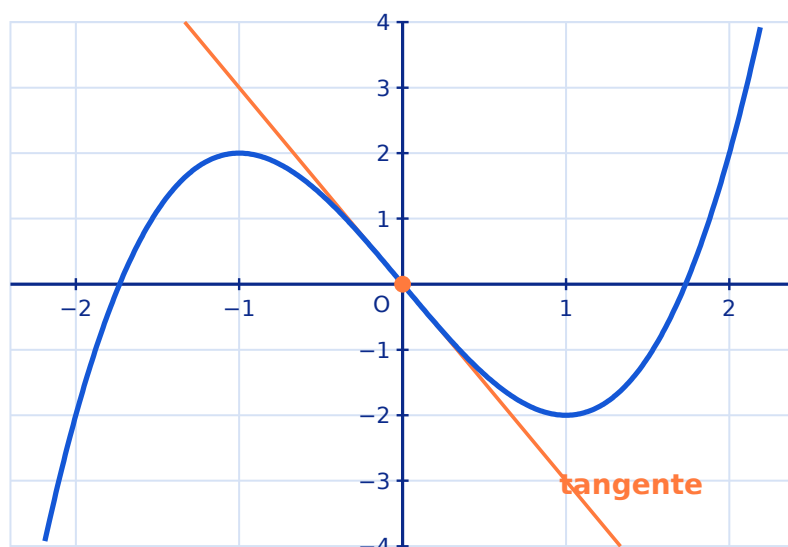
Propriété

Si f' s'annule **en changeant de signe** en a , alors le point $A(a ; f(a))$ est un point d'inflexion de la courbe. Réciproquement, en un point d'inflexion, f' s'annule en changeant de signe (et f admet un extremum local).

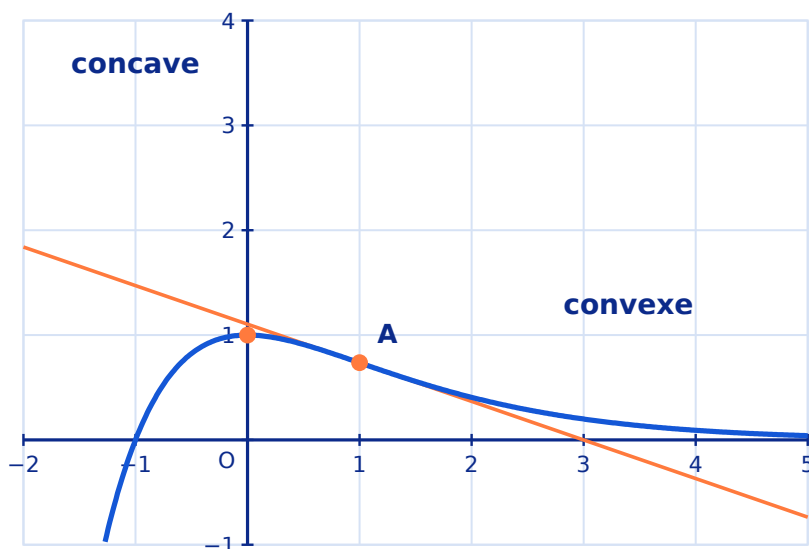
Piège classique

$f'(a) = 0$ ne suffit pas ! Il faut un **changement de signe**. Exemple : $f(x) = x^4$, $f'(x) = 4x^3$ vaut 0 en 0 mais reste positive : la courbe est convexe partout, il n'y a pas d'inflexion.

Exemple 1. $f(x) = x^3 - 3x$. On a $f'(x) = 3x^2 - 3$ et $f''(x) = 6x$. Elle est négative avant 0, positive après : $O(0 ; 0)$ est un point d'inflexion. La tangente en O est la droite d'équation $y = f'(0)x = -3x$: on voit sur la figure qu'elle traverse la courbe.



Exemple 2. Pour $f(x) = (x + 1)e^{-x}$, f' s'annule en 1 en passant du négatif au positif : $A(1 ; 2e^{-1})$ est un point d'inflexion. Comme $f'(1) = -e^{-1}$, la tangente en A a pour équation $y = -e^{-1}(x - 1) + 2e^{-1} = e^{-1}(3 - x)$.



6. Utiliser la convexité pour démontrer des inégalités

Une courbe convexe est au-dessus de toutes ses tangentes, une courbe concave en dessous. Cela donne, *sans aucun calcul de signe*, des inégalités très utiles.

Deux inégalités à connaître

- Pour tout réel x : $e^x \geq x + 1$. En effet, e^x est convexe sur $\mathbb{R}$ et sa tangente en 0 a pour équation $y = x + 1$ (car $f(0) = f'(0) = 1$).

- Pour tout $x > 0$: $\sqrt{x} \leq x + 1/2$. En effet, $\sqrt{x}$ est concave sur $]0 ; +\infty[$ et sa tangente en 1 est $y = 1/2(x - 1) + 1 = x + 1/2$.

Exemple

Remplaçons x par $-x^2$ dans $e^x \geq x + 1$: pour tout réel x , $e^{-x^2} \geq 1 - x^2$. De même, avec $x = -0,3$ on obtient $e^{-0,3} \geq 0,7$.

7. Étude complète d'une fonction

Méthode

1. Domaine de définition, de dérivabilité, éventuelle parité.
2. Limites aux bornes (limites usuelles, croissances comparées : $x^2 e^x \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow -\infty$).
3. Dérivée f' , factorisation, signe, tableau de variations.
4. Dérivée seconde f'' , signe, convexité, points d'inflexion.
5. Tangentes remarquables, puis tracé de la courbe.

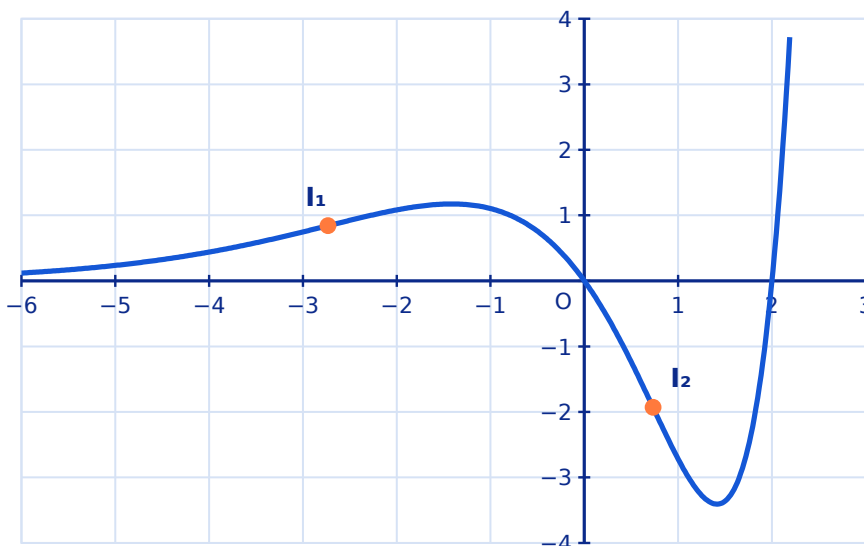
Exemple résolu : $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$ sur $\mathbb{R}$.

Limites. En $-\infty$: $x^2 e^x \rightarrow 0$ et $x e^x \rightarrow 0$, donc $f(x) \rightarrow 0$. En $+\infty$: $x^2 - 2x \rightarrow +\infty$ et $e^x \rightarrow +\infty$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$.

Variations. $f'(x) = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x)e^x = (x^2 - 2)e^x$. Elle s'annule en $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$; elle est positive à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
f	0	$\nearrow$	$\approx 1,17$	$\searrow$	$\approx -3,41$	$\nearrow$	$+\infty$

Convexité. $f''(x) = 2x e^x + (x^2 - 2)e^x = (x^2 + 2x - 2)e^x$. Le trinôme $x^2 + 2x - 2$ a pour discriminant $4 + 8 = 12$ et pour racines $-1 - \sqrt{3} \approx -2,73$ et $-1 + \sqrt{3} \approx 0,73$. Donc f est convexe sur $] -\infty ; -1 - \sqrt{3}]$, concave sur $[-1 - \sqrt{3} ; -1 + \sqrt{3}]$, convexe sur $[-1 + \sqrt{3} ; +\infty[$, avec deux points d'inflexion I_1 et I_2 .



8. Applications : problèmes d'optimisation

Optimiser, c'est trouver la valeur d'une variable qui rend une grandeur (aire, volume, coût, distance...) la plus grande ou la plus petite possible.

Méthode

1. Choisir la variable x et préciser son **domaine** (par exemple $x > 0$).
2. Exprimer la grandeur à optimiser comme une fonction $f(x)$.
3. Calculer $f'(x)$, étudier son signe, dresser le tableau de variations. Si $f' > 0$ partout, un point où $f' = 0$ est un **minimum global**.
4. Conclure par une phrase, avec les unités.

Exemple résolu : la boîte économique

On veut fabriquer une boîte sans couvercle, à base carrée de côté x cm, de volume 4 000 cm³ (4 litres). Quelle valeur de x minimise la quantité de carton ?

La hauteur est $h = 4000/x^2$. La surface de carton est $S(x) = x^2 + 4xh = x^2 + 16000/x$, pour $x > 0$.

$S'(x) = 2x - 16000/x^2 = 2x^3 - 16000/x^2$. Elle s'annule pour $x^3 = 8\,000$, soit $x = 20$, et est négative avant, positive après. De plus $S''(x) = 2 + 32000/x^3 > 0$: S est convexe, donc son minimum est atteint en $x = 20$.

Conclusion : avec une base de 20 cm sur 20 cm et une hauteur de 10 cm, la boîte demande 1 200 cm² de carton, c'est le minimum.

À retenir

- $(u \circ v)' = v' \times (u' \circ v)$; et si $g(x) = u(ax + b)$, alors $g'(x) = au'(ax + b)$.
- $(e^u)' = u'e^u$; $(u^n)' = nu'u^{n-1}$; $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ (si $u > 0$) ; $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ (à venir).
- La dérivée seconde est $f'' = (f)'$: elle mesure la variation de la pente de la tangente.
- f est convexe $\Leftrightarrow$ la courbe est au-dessus de ses tangentes $\Leftrightarrow f$ croissante $\Leftrightarrow f'' \geq 0$; concave $\Leftrightarrow$ en dessous de ses tangentes $\Leftrightarrow f$ décroissante $\Leftrightarrow f'' \leq 0$.
- Point d'inflexion : la convexité change ; f'' s'annule **en changeant de signe** ; la courbe traverse sa tangente.
- Inégalités : $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x ; $\sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$ pour $x > 0$.
- Optimisation : exprimer la grandeur, dériver, étudier le signe, conclure avec une phrase et les unités.