

Dérivation, composée et convexité

Exercices de maths - Terminale

21 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

1 Composées avec l'exponentielle ★★★

Dérive chacune des fonctions sur $\mathbb{R}$:

- a. $f(x) = e^{5x-1}$
- b. $g(x) = e^{x^2+1}$
- c. $h(x) = e^{-x^2+3x}$
- d. $k(x) = 3e^{-2x}$

2 Composées avec une puissance ★★★

Dérive :

- a. $f(x) = (3x + 1)^4$ sur $\mathbb{R}$
- b. $g(x) = (x^2 - x + 2)^3$ sur $\mathbb{R}$
- c. $h(x) = (1 - 2x)^5$ sur $\mathbb{R}$
- d. $k(x) = \mathbf{1/(2x-1)^2}$ sur $\mathbf{]1/2 ; +\infty[}$

3 Composées avec une racine ★★★

Précise l'ensemble de dérivabilité puis dérive :

- a. $f(x) = \sqrt{2x + 5}$
- b. $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
- c. $h(x) = \sqrt{3 - x}$

4 Vrai ou faux ? ★★★

Dis si chaque affirmation est vraie ou fausse et justifie.

- a. La dérivée de $x \mapsto e^{x^2}$ est $x \mapsto e^{x^2}$.
- b. La dérivée de $x \mapsto (x + 1)^3$ est $x \mapsto 3(x + 1)^2$.
- c. La dérivée de $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ est $x \mapsto \mathbf{1/2\sqrt{x^2+1}}$.
- d. La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

5 Dérivée seconde et inflexion ★★★

Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$.

- Calcule $f'(x)$ et $f''(x)$.
- Étudie la convexité de f .
- Montre que la courbe admet un point d'inflexion et donne ses coordonnées.

6 Lire un tableau de variations de f' ★★★

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Le tableau de variations de sa dérivée f' est : f' croissante sur $] -\infty ; -1]$, décroissante sur $[-1 ; 2]$, croissante sur $[2 ; +\infty[$, avec $f'(-1) = 3$ et $f'(2) = -1$.

- Sur quels intervalles f est-elle convexe ? concave ?
- La courbe a-t-elle des points d'inflexion ? Lesquels (abscisses) ?
- Que peut-on dire du sens de variation de f au voisinage de 2 ?

7 Convexité des fonctions de référence ★★★

Étudie la convexité de : a. $x \mapsto x^4$ sur $\mathbb{R}$; b. $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $]0 ; +\infty[$; c. $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

8 Une fonction toujours croissante ★★★

Soit $f(x) = (2x - 1)e^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

- Calcule $f'(x)$.
- Montre que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Donne l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

9 Un minimum pour une puissance ★★★

Soit $g(x) = (x^2 + 1)^3$ sur $\mathbb{R}$.

- Calcule g' et dresse le tableau de variations.
- Calcule g'' et étudie la convexité.

10 Une racine dans un produit ★★★

Soit $h(x) = x\sqrt{x+1}$ sur $] -1 ; +\infty[$.

- Montre que $h'(x) = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$.
- Dresse le tableau de variations de h ; donne son minimum (valeur exacte puis

approchée au millième).

c. Admet que $h''(x) = \frac{3x+4}{4(x+1)\sqrt{x+1}}$. Que peut-on dire de la convexité ?

11 Une courbe qui s'aplatit ★★★

Soit $f(x) = xe^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

- Montre que $f'(x) = (1 - x)e^{-x}$ et que $f''(x) = (x - 2)e^{-x}$.
- Étudie les variations et la convexité de f .
- Détermine l'équation de la tangente au point d'inflexion.

12 Quatre degrés, deux inflexions ★★★

Soit $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2$ sur $\mathbb{R}$. Calcule f' et f'' , factorise-les, puis détermine la convexité de f et ses points d'inflexion.

13 Une inégalité par la convexité ★★★

- Justifie que pour tout réel x , $e^x \geq x + 1$.
- En déduire que, pour tout réel x , $e^{-x^2} \geq 1 - x^2$.
- Montre que pour tout $x < 1$, $e^x \leq \frac{1}{1-x}$.

14 Tangente qui traverse la courbe ★★★

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

- Montre que la courbe a un unique point d'inflexion A, et donne ses coordonnées.
- Détermine l'équation de la tangente T en A.
- Montre que $f(x) - (-x + 1) = (x - 1)^3$. Que peut-on dire de la position de la courbe par rapport à T ?

15 La boîte de volume maximal ★★★

Dans une feuille de carton rectangulaire de 30 cm sur 20 cm, on découpe un carré de côté x cm à chaque coin, puis on replie pour former une boîte sans couvercle.

- Quel est l'intervalle de variation de x ?
- Montre que le volume est $V(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x$.
- Étudie les variations de V .
- Pour quelle valeur de x le volume est-il maximal ? Donne la valeur de x au centième et le volume maximal arrondi au cm^3 .

16 Étude complète ★★★

Soit $f(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$. On admet que $f(x)$ tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$.

- Calcule f' et f'' ; vérifie que $f'(x) = -x(x - 1)e^{-x}$ et $f''(x) = (x^2 - 3x + 1)e^{-x}$.
- Dresse le tableau de variations complet de f .
- Étudie la convexité et donne les abscisses des points d'inflexion.
- Trace l'allure de la courbe.

17 Le point le plus proche ★★★

Dans un repère orthonormé, on considère la courbe de la fonction racine carrée et le point $A(4 ; 0)$. Pour $x \geq 0$, $M(x ; \sqrt{x})$ est un point de la courbe.

- Montre que $AM^2 = x^2 - 7x + 16$.
- En déduire la position de M qui minimise la distance AM , puis la distance minimale (valeur exacte et valeur approchée au centième).
- Retrouve le résultat en dérivant directement $d(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 16}$.

18 La courbe en cloche ★★★

Soit $f(x) = e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

- Calcule f' et f'' et dresse le tableau de variations de f .
- Étudie la convexité de f et détermine ses points d'inflexion.
- Montre que $f(x) \geq 1 - x^2$ pour tout réel x (on pourra utiliser $e^t \geq t + 1$).

19 Trouver les paramètres ★★★

Soit $f(x) = (ax + b)e^{-x}$, avec a et b deux réels. On sait que $f(0) = 2$ et que la courbe de f admet un point d'inflexion d'abscisse 3.

- Exprime f' et f'' en fonction de a et b .
- Détermine a et b .
- Étudie alors les variations de f et vérifie que l'abscisse 3 correspond bien à un point d'inflexion.

20 Une composée de deux fonctions ★★★

Soit $f(x) = \sqrt{e^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

- Justifie que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calcule f' .
- Calcule f'' et montre que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
- Détermine l'équation de la tangente en 0, puis démontre que pour tout réel x , $\sqrt{e^x + 1} \geq 1 + \frac{x}{2}$.

$$+ 1) \geq \sqrt{2/4}(x + 4).$$

21 Vrai ou faux avec contre-exemple ★★★

Pour chaque affirmation, dis si elle est vraie ou fausse. Si elle est fausse, donne un contre-exemple.

- a. Si $f'(a) = 0$, alors le point d'abscisse a est un point d'inflexion.
- b. Si $f''(a) = 0$, alors le point d'abscisse a est un point d'inflexion.
- c. Si f est convexe sur $\mathbb{R}$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- d. Si f est convexe sur I , alors f' est croissante sur I .
- e. La somme de deux fonctions convexes sur I est convexe sur I .