

Dérivation : nombre dérivé et tangente

Corrigé des exercices - 1ère

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Taux de variation entre deux valeurs ★★★

- $f(1) = 1$ et $f(4) = 16$. Taux : $16 - 1/4 - 1 = 15/3 = 5$.
- $g(-1) = 2 \times 1 - (-1) = 3$ et $g(2) = 2 \times 4 - 2 = 6$. Taux : $6 - 3/2 - (-1) = 3/3 = 1$.
- $h(2) = 1/2$ et $h(5) = 1/5$. Taux : $(1/5 - 1/2) \div 3 = -3/10 \div 3 = -1/10$.

2 Vitesse moyenne d'une pierre ★★★

- $d(1) = 5$ et $d(3) = 45$. Vitesse moyenne : $45 - 5/3 - 1 = 40/2 = 20$ m/s.
- $d(2) = 20$ et $d(2,5) = 5 \times 6,25 = 31,25$. Vitesse moyenne : $31,25 - 20/0,5 = 11,25/0,5 = 22,5$ m/s.
- Chaque nombre est le taux de variation de d , c'est-à-dire le coefficient directeur d'une **sécante** à la courbe de d . L'intervalle étant plus petit en (b), la vitesse se rapproche de la vitesse à $t = 2$ (qui vaut 20 m/s).

3 Du taux de variation au nombre dérivé ★★★

- $f(2 + h) = 4 + 4h + h^2$ et $f(2) = 4$, donc le taux vaut $4h + h^2/h = 4 + h$ (on simplifie par $h \neq 0$).
- Pour $h = 1 : 5$. Pour $h = 0,1 : 4,1$. Pour $h = 0,01 : 4,01$.
- Quand h tend vers 0, $4 + h$ tend vers 4. Donc $f'(2) = 4$.

4 Lecture graphique de nombres dérivés ★★★

- La tangente en A passe par (0 ; 1) et (1 ; 3) : pente $3 - 1/1 - 0 = 2$, donc $f'(0) = 2$. La tangente en B est horizontale ($y = 3$) : $f'(2) = 0$. La tangente en C passe par (4 ; 1) et (3 ; 3) : pente $3 - 1/3 - 4 = -2$, donc $f'(4) = -2$.
- La pente est 2 et l'ordonnée à l'origine est 1 : $y = 2x + 1$.

5 Nombres dérivés avec les formules ★★★

- $f'(x) = 3x^2$, donc $f'(2) = 3 \times 4 = 12$.
- $g'(x) = -1/x^2$, donc $g'(4) = -1/16$.

- c. $h'(x) = 1/2\sqrt{x}$, donc $h'(9) = 1/2 \times 3 = 1/6$.
 d. $k'(x) = 5x^4$, donc $k'(-1) = 5 \times (-1)^4 = 5$.

6 Dérivées de polynômes ★★★

- a. $f'(x) = 5 \times 2x - 3 + 0 = 10x - 3$.
 b. $g'(x) = 4x^3 + 2x$.
 c. $h'(x) = 1/2 \times 4x^3 - 3 \times 3x^2 + 1 = 2x^3 - 9x^2 + 1$.
 d. $k'(x) = 0 - 5x^4 = -5x^4$.

7 Équations de tangentes simples ★★★

- a. $f(3) = 9$ et $f'(x) = 2x$, donc $f'(3) = 6$. Tangente : $y = 6(x - 3) + 9 = 6x - 9$.
 b. $g(1) = 1$ et $g'(x) = 3x^2$, donc $g'(1) = 3$. Tangente : $y = 3(x - 1) + 1 = 3x - 2$.

8 Vrai ou faux ? ★★★

- a. **Vrai** : $(3x)' = 3$ et la dérivée d'une constante est 0.
 b. **Faux** : $(x^2)' = 2x$, donc le nombre dérivé en 3 vaut 6 (c'est la valeur 9 de $f(3)$ qu'il ne faut pas confondre).
 c. **Faux** : $(uv)' = u'v + uv'$. Contre-exemple : $u = v = x$, $(x^2)' = 2x$ alors que $1 \times 1 = 1$.
 d. **Vrai** : le coefficient directeur de la tangente est $f'(a) = 0$, son équation est $y = f(a)$.
 e. **Faux** : le taux entre 0 et h vaut $1/\sqrt{h}$, qui n'a pas de limite réelle ; la tangente est verticale.

9 Nombre dérivé par la définition ★★★

- a. $f(1) = -1$ et $f(1 + h) = 2(1 + 2h + h^2) - 3 - 3h = -1 + h + 2h^2$. Taux : $h + 2h^2/h = 1 + 2h$, qui tend vers 1. Donc **$f'(1) = 1$** .
 b. $g(-1) = 1 - 5 = -4$ et $g(-1 + h) = 1 - 2h + h^2 - 5 + 5h = -4 + 3h + h^2$. Taux : $3h + h^2/h = 3 + h$, qui tend vers 3. Donc **$g'(-1) = 3$** . (Vérification avec $g'(x) = 2x + 5$: $-2 + 5 = 3$.)

10 Tangente à une cubique ★★★

$$f'(x) = 3x^2 - 2.$$

En $a = 1$: $f(1) = -1$, $f'(1) = 1$. Tangente : $y = 1(x - 1) - 1 = x - 2$.

En $a = -2$: $f(-2) = -8 + 4 = -4$, $f'(-2) = 12 - 2 = 10$. Tangente : $y = 10(x + 2) - 4 = 10x + 16$.

11 Dérivées de produits ★★★

- a. $u = x^2 + 1, u' = 2x$; $v = 3x - 2, v' = 3$. $f'(x) = 2x(3x - 2) + 3(x^2 + 1) = 6x^2 - 4x + 3x^2 + 3 = \mathbf{9x^2 - 4x + 3}$.
- b. $u = 2x - 1, u' = 2$; $v = \sqrt{x}, v' = \mathbf{1/2\sqrt{x}}$. $g'(x) = 2\sqrt{x} + (2x - 1) \times \mathbf{1/2\sqrt{x}}$. On met au même dénominateur : $2\sqrt{x} = \mathbf{4x/2\sqrt{x}}$ (car $4x = 2\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}$), donc $g'(x) = \mathbf{4x + 2x - 1/2\sqrt{x} = 6x - 1/2\sqrt{x}}$.
- c. $u = x^3 - x, u' = 3x^2 - 1$; $v = x^2 + 2, v' = 2x$. $h'(x) = (3x^2 - 1)(x^2 + 2) + (x^3 - x) \times 2x = 3x^4 + 5x^2 - 2 + 2x^4 - 2x^2 = \mathbf{5x^4 + 3x^2 - 2}$. (Contrôle : $h(x) = x^5 + x^3 - 2x$.)

12 Dérivées de quotients ★★★

- a. $u = x + 1, u' = 1$; $v = x - 2, v' = 1$. $f'(x) = \mathbf{(x - 2) - (x + 1)/(x - 2)^2 = -3/(x - 2)^2}$.
- b. $u = 3x - 1, u' = 3$; $v = x^2 + 1, v' = 2x$. Numérateur : $3(x^2 + 1) - (3x - 1) \times 2x = 3x^2 + 3 - 6x^2 + 2x = -3x^2 + 2x + 3$. $g'(x) = \mathbf{-3x^2 + 2x + 3/(x^2 + 1)^2}$.
- c. $u = x, u' = 1$; $v = x^2 + 4, v' = 2x$. Numérateur : $(x^2 + 4) - x \times 2x = 4 - x^2$. $h'(x) = \mathbf{4 - x^2/(x^2 + 4)^2}$.

13 Composées avec une fonction affine ★★★

- a. Sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = 3 \times 4(3x - 5)^3 = \mathbf{12(3x - 5)^3}$.
- b. Sur $] -1/2 ; +\infty[$: $g'(x) = 2 \times \mathbf{1/2\sqrt{2x + 1}} = \mathbf{1/\sqrt{2x + 1}}$.
- c. Sur $] -3/4 ; +\infty[$ (ou sur $] -\infty ; -3/4[$) : $h'(x) = 4 \times \mathbf{(-1/(4x + 3)^2)} = \mathbf{-4/(4x + 3)^2}$.
- d. Sur $\mathbb{R}$, ici $a = -1$: $k'(x) = -1 \times 6(1 - x)^5 = \mathbf{-6(1 - x)^5}$.

14 Tangentes horizontales ★★★

La tangente est horizontale en a si, et seulement si, $f'(a) = 0$.

- a. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$. $f(1) = -2$ et $f(-1) = 2$.
Points : **(1 ; -2)** et **(-1 ; 2)**.
- b. $g'(x) = 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$. $g(3) = 9 - 18 + 4 = -5$. Point : **(3 ; -5)**.

15 Tangentes passant par l'origine ★★★

$f'(a) = 2a$ et $f(a) = a^2 + 1$. La tangente a pour équation $y = 2a(x - a) + a^2 + 1$. Elle passe par O si $0 = 2a(0 - a) + a^2 + 1$, soit $-2a^2 + a^2 + 1 = 0$, donc $1 - a^2 = 0$, d'où $a = 1$ ou $a = -1$.

Pour $a = 1$: $y = 2(x - 1) + 2 = \mathbf{2x}$. Pour $a = -1$: $y = -2(x + 1) + 2 = \mathbf{-2x}$.

16 Tangente parallèle à une droite ★★★

Deux droites sont parallèles si elles ont le même coefficient directeur : on cherche a tel que $f'(a) = 2$. Comme $f'(x) = 2x - 4$, l'équation $2a - 4 = 2$ donne $a = 3$. On a $f(3) = 9 - 12 = -3$. La tangente est $y = 2(x - 3) - 3 = 2x - 9$. Oui, au point de coordonnées $(3 ; -3)$.

17 Coût marginal ★★★

- a. $C'(q) = 0,5 \times 2q + 4 = q + 4$, donc **$C'(10) = 14$ €**.
- b. $C(10) = 50 + 40 + 50 = 140$ et $C(11) = 0,5 \times 121 + 44 + 50 = 154,5$. Le 11^e objet coûte **14,50 €**.
- c. Le coût marginal 14 € est une très bonne estimation du coût réel 14,50 € : l'écart n'est que de 0,50 €.

18 Vitesse instantanée ★★★

- a. $d'(t) = 10t + 2$ (en m/s).
- b. $d'(0) = 2$ m/s. $d'(3) = 32$ m/s, soit $32 \times 3,6 = 115,2$ km/h.
- c. $d(3) = 45 + 6 = 51$ et $d(0) = 0$, donc la vitesse moyenne est **$51/3 = 17$ m/s**. Elle est inférieure à la vitesse finale (32 m/s) car le cycliste accélère : sa vitesse moyenne est la moyenne de 2 et 32.

19 Tangente à un quotient ★★★

- a. $u = 2x + 1$, $u' = 2$; $v = x - 1$, $v' = 1$. Numérateur : $2(x - 1) - (2x + 1) = -3$.
Donc $f'(x) = -3/(x - 1)^2$.
- b. $f(2) = 5/1 = 5$ et $f'(2) = -3$. T : $y = -3(x - 2) + 5 = -3x + 11$.
- c. Avec l'axe des ordonnées ($x = 0$) : $y = 11$, point **(0 ; 11)**. Avec l'axe des abscisses ($y = 0$) : $-3x + 11 = 0$, $x = 11/3$, point **(11/3 ; 0)**.

20 Tangente à une fonction avec racine ★★★

$g'(x) = 3 \times \frac{1}{2}\sqrt{x} - 2 = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 2$. En 4 : $g(4) = 3 \times 2 - 8 = -2$ et $g'(4) = \frac{3}{4} - 2 = -5/4$. La tangente est $y = -5/4(x - 4) - 2 = -5/4x + 5 - 2 = -5/4x + 3$.

21 Dérivée de l'inverse par la définition ★★★

Soit $h \neq 0$ avec $a + h \neq 0$. Le taux de variation vaut $(1/a + h - 1/a) \div h$. On met au même dénominateur le numérateur : $1/a + h - 1/a = a - (a + h)/a(a + h) = -h/a(a + h)$. Donc le taux vaut $-h/a(a + h) \times 1/h = -1/a(a + h)$ (on a simplifié par $h \neq 0$). Quand h tend vers 0, $a(a + h)$ tend vers $a^2 \neq 0$, donc le taux tend vers $-1/a^2$. Ainsi f est

dérivable en a et $f'(a) = -1/a^2$.

22 Non-dérivabilité de la racine carrée en 0 ★★★

- a. $\sqrt{h} - \sqrt{0/h} - 0 = \sqrt{h/h} = 1/\sqrt{h}$ (car $h = \sqrt{h} \times \sqrt{h}$).
- b. Pour $h = 0,01$: $1/0,1 = 10$. Pour $h = 0,0001$: $1/0,01 = 100$.
- c. Le taux de variation devient aussi grand qu'on le veut quand h se rapproche de 0 : il n'a pas de limite réelle. **f n'est pas dérivable en 0**. La courbe a en O une **tangente verticale** (l'axe des ordonnées).

23 Déterminer une parabole ★★★

A est sur la courbe : $f(1) = 2$, soit $a + b + 1 = 2$, donc $a + b = 1$. (1)

$f'(x) = 2ax + b$ et $f'(1) = 3$, donc $2a + b = 3$. (2)

(2) - (1) : $a = 2$, puis $b = 1 - 2 = -1$. Donc **$f(x) = 2x^2 - x + 1$** . Vérification : $f(1) = 2$; $f'(1) = 4 - 1 = 3$.

24 Position relative d'une courbe et de sa tangente ★★★

- a. $f(1) = -1$ et $f'(x) = 2x - 2$, $f'(1) = 0$: T a pour équation $y = -1$. On étudie $f(x) - (-1) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$. La courbe est **au-dessus de T** sur $\mathbb{R}$ (elle touche T en $x = 1$).
- b. $g(1) = 1$, $g'(1) = 3$: T a pour équation $y = 3x - 2$. On étudie $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$ (on le vérifie en développant). Ce produit est du signe de $x + 2$ (car $(x - 1)^2 \geq 0$) : la courbe est **au-dessus de T pour $x > -2$ ($x \neq 1$), en dessous pour $x < -2$** , et T coupe aussi la courbe en $x = -2$.

25 Deux courbes tangentes ★★★

$f(1) = 1$ et $g(1) = -1 + 4 - 2 = 1$: les courbes passent par le même point (1 ; 1).

$f'(x) = 2x$ donc $f'(1) = 2$. $g'(x) = -2x + 4$ donc $g'(1) = 2$. Les tangentes ont même point et même coefficient directeur : elles sont confondues. Équation : $y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$.

26 Approximations affines ★★★

- a. $f'(9) = 1/6$, $h = 0,06$: $\sqrt{9,06} \approx 3 + 0,06/6 = 3,01$. Calculatrice : 3,00998...
- b. $f'(1) = -1$, $h = 0,02$: $1/1,02 \approx 1 - 0,02 = 0,98$. Calculatrice : 0,98039...
- c. $f'(1) = 5$, $h = 0,01$: $1,01^5 \approx 1 + 5 \times 0,01 = 1,05$. Calculatrice : 1,05101...

Les approximations sont justes à moins de 0,002 près : h étant petit, la tangente est très proche de la courbe.