

Dérivation : nombre dérivé et tangente

Cours de maths - 1ère

Tu sais déjà qu'une droite a une **pente** : elle dit de combien monte (ou descend) la droite quand on avance d'une unité. Pour une courbe, la pente change d'un endroit à l'autre : la route est tantôt raide, tantôt plate. La **dérivation** est l'outil qui mesure cette pente **en un point précis**. Elle sert à connaître la vitesse instantanée d'un mobile, le coût d'une unité supplémentaire produite, ou à tracer une tangente. Dans ce chapitre, tu apprends à définir le nombre dérivé, à écrire l'équation d'une tangente, puis à calculer des fonctions dérivées avec les formules usuelles.

Rappels utiles

Une droite non verticale a une équation $y = mx + p$, où m est le **coefficient directeur** (la pente) : $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. Deux droites sont parallèles si elles ont le même coefficient directeur. Une droite horizontale a pour pente 0. Rappelle-toi aussi les identités remarquables : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

1. Taux de variation

Taux de variation

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et a et b deux réels distincts de I . Le **taux de variation** de f entre a et b est le nombre $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

C'est la variation de f divisée par la variation de x : « de combien f varie-t-elle quand x augmente de 1, en moyenne ». Graphiquement, si $A(a ; f(a))$ et $M(b ; f(b))$ sont deux points de la courbe, ce nombre est le **coefficient directeur de la droite (AM)**, appelée **sécante**.

Exemple

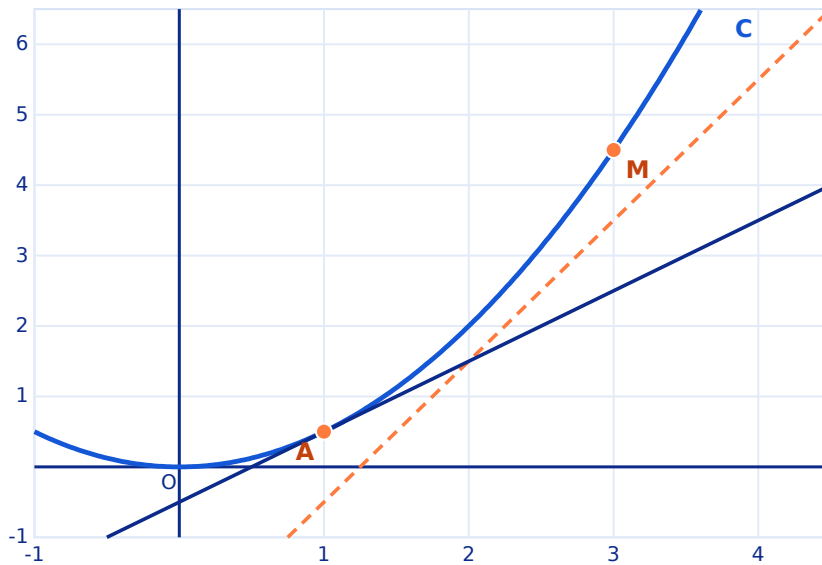
Soit $f(x) = x^2 - 4x$. Entre 1 et 5 : $f(1) = -3$ et $f(5) = 5$, donc le taux de variation est $\frac{5 - (-3)}{5 - 1} = \frac{8}{4} = 2$. Entre 2 et 3 : $f(2) = -4$ et $f(3) = -3$, donc le taux vaut $\frac{-3 - (-4)}{3 - 2} = 1$.

Vitesse moyenne

Un vélo parcourt $d(t) = 2t^2$ mètres en t secondes (départ arrêté). Entre $t = 1$ et $t = 4$:

Fiche en ligne : maths-facile.eu/derivation-nombre-derive-et-tangente-cours-1ere/ · Cours, exercices et contrôles

$d(1) = 2$ et $d(4) = 32$, donc la vitesse moyenne est $32 - 2/4 - 1 = 10$ m/s. Un taux de variation, c'est une **vitesse moyenne** quand la fonction est une distance en fonction du temps.



Sur la figure, la sécante (AM) est en pointillés et la tangente en A en trait plein : quand M se rapproche de A, la sécante se rapproche de la tangente. C'est l'idée de la partie suivante.

2. Nombre dérivé en un point

Un taux de variation donne une vitesse *moyenne*. Pour obtenir la vitesse à *un instant précis*, on rapproche les deux valeurs. On pose $b = a + h$, où h est un réel non nul « très petit », et on étudie le taux de variation entre a et $a + h$:

$$f(a + h) - f(a)/h$$

Nombre dérivé

On dit que f est **dérivable en a** si le taux de variation $f(a + h) - f(a)/h$ se rapproche d'un nombre réel fixe quand h se rapproche de 0 (sans jamais valoir 0). Ce nombre est la **limite** du taux de variation ; on l'appelle le **nombre dérivé de f en a** et on le note $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) - f(a)/h$$

Méthode : calculer un nombre dérivé par la définition

1. Calcule $f(a)$.
2. Calcule $f(a + h)$ en développant.
3. Écris le taux $f(a + h) - f(a)/h$ et **simplifie par h** (c'est possible car $h \neq 0$).
4. Fais tendre h vers 0 : le terme qui contient encore h disparaît.

Exemple 1

$f(x) = x^2$ en $a = 3$. On a $f(3) = 9$ et $f(3 + h) = 9 + 6h + h^2$. Le taux vaut $9 + 6h + h^2 - 9/h = 6h + h^2/h = 6 + h$. Quand h tend vers 0, $6 + h$ tend vers 6. Donc $f'(3) = 6$.

Exemple 2

$f(x) = x^2 - 4x$ en $a = 1$. On a $f(1) = -3$ et $f(1 + h) = 1 + 2h + h^2 - 4 - 4h = -3 - 2h + h^2$. Le taux vaut $-2h + h^2/h = -2 + h$, qui tend vers -2 . Donc $f'(1) = -2$.

Piège

On ne remplace jamais h par 0 **avant** d'avoir simplifié : le quotient $0/0$ n'a aucun sens. Il faut d'abord factoriser par h au numérateur, simplifier, et seulement ensuite laisser h tendre vers 0.

Le nombre dérivé $f'(a)$ est la **vitesse instantanée** à l'instant a quand f décrit une distance en fonction du temps, et plus généralement le **taux de variation instantané** de f en a . Il n'existe pas toujours : une fonction peut ne pas être dérivable en un point (par exemple la fonction racine carrée en 0, voir la partie 4).

3. Tangente à une courbe

Tangente

Soit f dérivable en a et C sa courbe. La **tangente** à C au point $A(a ; f(a))$ est la droite qui passe par A et dont le coefficient directeur est $f'(a)$. C'est la position limite des sécantes (AM) quand M se rapproche de A .

Équation de la tangente

La tangente à C au point d'abscisse a a pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Démonstration. Une droite de coefficient directeur $m = f'(a)$ a une équation de la forme $y = mx + p$. Elle passe par $A(a ; f(a))$ donc $f(a) = ma + p$, d'où $p = f(a) - ma$. Ainsi $y = mx + f(a) - ma = m(x - a) + f(a)$.

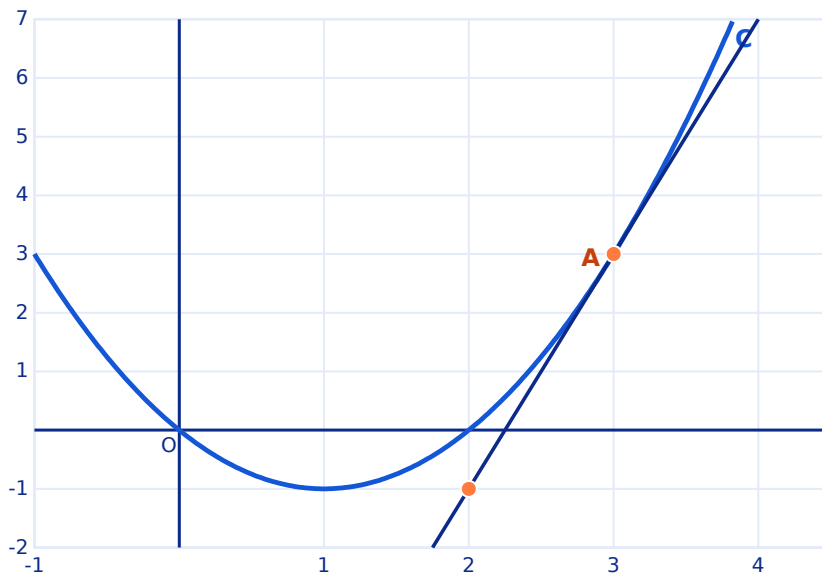
Méthode : déterminer l'équation d'une tangente

1. Calcule $f(a)$.

2. Calcule $f'(a)$ (par la définition ou avec une formule de dérivation).
3. Remplace dans $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
4. Développe et réduis pour obtenir $y = mx + p$.

Exemple

Soit $f(x) = x^2 - 2x$ et $a = 3$. On a $f(3) = 3$. Par la définition, $f(3 + h) = 9 + 6h + h^2 - 6 - 2h = 3 + 4h + h^2$, donc le taux est $4 + h$ et $f'(3) = 4$. La tangente a pour équation $y = 4(x - 3) + 3$, soit $y = 4x - 9$.



Cas particuliers

Si $f'(a) = 0$, la tangente est **horizontale** : son équation est $y = f(a)$. C'est ce qui se passe au sommet d'une parabole. Si $f'(a) > 0$, la courbe « monte » près de A ; si $f'(a) < 0$, elle « descend ».

Piège

La tangente ne *touche* pas forcément la courbe en un seul point, et elle peut la traverser : la tangente en 0 à la courbe de $x \mapsto x^3$ est l'axe des abscisses, qui traverse la courbe. Ce qui définit la tangente, c'est sa pente $f'(a)$, pas le nombre de points communs.

4. Fonction dérivée et dérivées usuelles

Fonction dérivée

Si f est dérivable en tout réel x d'un intervalle I , on dit qu'elle est **dérivable sur I** . La

fonction f' qui, à chaque x de I , associe le nombre dérivé $f'(x)$ est la **fonction dérivée** de f .

Calculer chaque nombre dérivé avec la définition serait très long. On utilise donc des formules, à connaître :

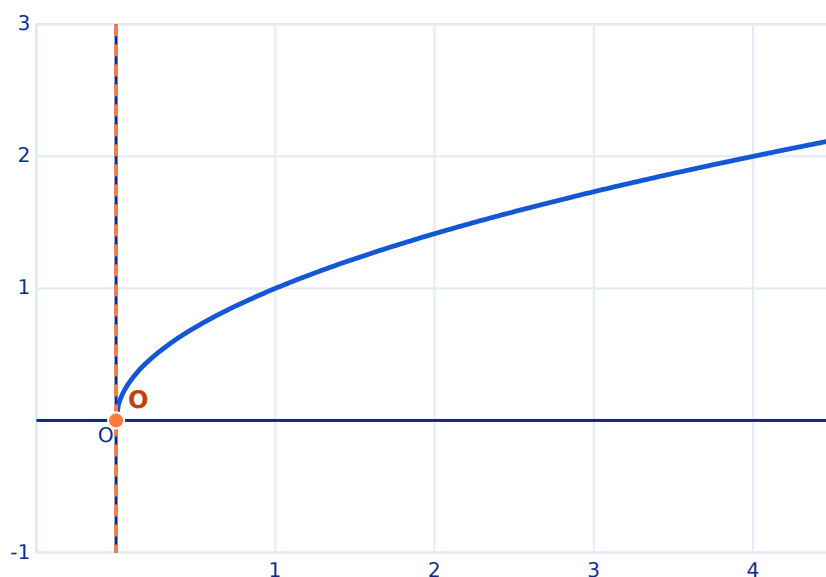
Fonction f	Dérivée f'	Ensemble de dérivabilité
$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ (n entier, $n \geq 1$)	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \mathbf{1/x}$	$f'(x) = \mathbf{-1/x^2}$	$] -\infty ; 0[$ et $] 0 ; +\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \mathbf{1/2\sqrt{x}}$	$] 0 ; +\infty[$

Démonstration pour $x \mapsto x^2$. Pour tout réel a , le taux de variation entre a et $a + h$ vaut $(a + h)^2 - a^2/h = 2ah + h^2/h = 2a + h$, qui tend vers $2a$. Donc la dérivée de $x \mapsto x^2$ est $x \mapsto 2x$.

Démonstration pour $x \mapsto 1/x$ ($a \neq 0$). Le taux de variation vaut $(1/a + h - 1/a) \div h = a - (a + h)/a(a + h)h = -h/a(a + h)h = \mathbf{-1/a(a + h)}$, qui tend vers $\mathbf{-1/a^2}$.

Exemples

Si $f(x) = x^5$, alors $f'(x) = 5x^4$. Si $g(x) = x^8$, $g'(x) = 8x^7$. En particulier la dérivée de x^3 en 2 est $3 \times 2^2 = 12$, ce qui donne la tangente $y = 12x - 16$ (car $12(x - 2) + 8$). Pour $h(x) = \mathbf{1/x}$ en $a = 2$: $h'(2) = \mathbf{-1/4}$, et la tangente est $y = \mathbf{-1/4(x - 2) + 1/2}$, soit $y = \mathbf{-x/4 + 1}$.



La racine carrée n'est pas dérivable en 0

Entre 0 et $h > 0$, le taux de variation de $\sqrt{x}$ vaut $\sqrt{h} - 0/h = 1/\sqrt{h}$. Quand h se rapproche de 0, ce nombre devient de plus en plus grand : il n'a pas de limite réelle. La courbe admet en 0 une **tangente verticale** (en pointillés sur la figure), qui n'a pas de coefficient directeur. La fonction racine carrée est donc dérivable seulement sur $]0 ; +\infty[$.

5. Opérations sur les fonctions dérivables

Dans le tableau suivant, u et v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I , et k est un réel.

Dérivées et opérations

Fonction	Dérivée	Condition
$u + v$	$u' + v'$	
ku	ku'	
uv	$u'v + uv'$	
$1/v$	$-v'/v^2$	$v(x) \neq 0$ sur I
u/v	$u'v - uv'/v^2$	$v(x) \neq 0$ sur I

Démonstration pour la somme. Le taux de variation de $u + v$ entre a et $a + h$ est $u(a + h) - u(a)/h + v(a + h) - v(a)/h$: c'est la somme des deux taux, qui tendent vers $u'(a)$ et $v'(a)$. On en déduit celle de ku de la même façon.

Piège classique

La dérivée d'un produit n'est **pas** le produit des dérivées : $(x \times x)' = (x^2)' = 2x$, alors que $x' \times x' = 1 \times 1 = 1$. De même pour un quotient, il faut utiliser la formule complète avec le dénominateur v^2 .

Somme et produit par un réel

$f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x - 7$. On dérive terme à terme : $f'(x) = 4 \times 3x^2 - 5 \times 2x + 2 - 0 = 12x^2 - 10x + 2$.

Produit

$f(x) = (2x + 1)(x^2 - 3)$. On pose $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = x^2 - 3$; alors $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 2x$. Donc $f'(x) = 2(x^2 - 3) + (2x + 1) \times 2x = 2x^2 - 6 + 4x^2 + 2x = 6x^2 + 2x - 6$.

(Contrôle : en développant d'abord, $f(x) = 2x^3 + x^2 - 6x - 3$ et on retrouve la même dérivée.)

Quotient

$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ sur $] -1 ; +\infty[$. Ici $u(x) = x^2$ et $v(x) = x + 1$, donc $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 1$. Alors $f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2 \times 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$.

6. Dérivée d'une fonction composée avec une fonction affine

Composée avec $x \mapsto ax + b$

Soit g une fonction dérivable, a et b deux réels. La fonction $f : x \mapsto g(ax + b)$ est dérivable là où $ax + b$ est dans l'ensemble de dérivabilité de g , et :

$$f'(x) = a \times g'(ax + b)$$

En pratique : on dérive la « fonction de l'extérieur » en gardant l'intérieur $ax + b$, puis on **multiplie par a** .

Exemples

- $f(x) = (2x + 3)^5$: ici $g(X) = X^5$, $a = 2$. $f'(x) = 2 \times 5(2x + 3)^4 = \mathbf{10(2x + 3)^4}$.
- $f(x) = \sqrt{3x - 1}$, définie et dérivable pour $3x - 1 > 0$, soit $x > \mathbf{1/3}$: $f'(x) = 3 \times \mathbf{1/2\sqrt{3x - 1}} = \mathbf{3/2\sqrt{3x - 1}}$.
- $f(x) = \mathbf{1/2x + 5}$ sur $] -5/2 ; +\infty[$: $f'(x) = 2 \times (-\mathbf{1/(2x + 5)^2}) = \mathbf{-2/(2x + 5)^2}$.

Piège

N'oublie pas le facteur a ! La dérivée de $(2x + 3)^5$ n'est pas $5(2x + 3)^4$. Et elle n'est pas non plus $5 \times 2x^4$: l'intérieur reste inchangé.

7. Méthode complète : dérivée, nombre dérivé et tangente

Méthode

1. Détermine l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité.
2. Repère la forme de f (somme, produit, quotient, composée affine) et nomme u et v .
3. Calcule u' et v' , puis applique la formule.
4. Factorise ou réduis $f'(x)$ pour qu'elle soit exploitable.

5. Évalue $f'(a)$ et $f(a)$, puis écris la tangente.

Exemple 1

$f(x) = x^2 + 1/x$ sur $]0 ; +\infty[$. On pose $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = x : f'(x) = 2x \times x - (x^2 + 1) \times 1/x^2 = x^2 - 1/x^2$. En $a = 2 : f(2) = 5/2$ et $f'(2) = 3/4$. La tangente est $y = 3/4(x - 2) + 5/2 = 3/4x + 1$. De plus $f'(x) = 0$ pour $x = 1$: la tangente en $(1 ; 2)$ est horizontale.

Exemple 2

$g(x) = 3\sqrt{x} - 2x$ sur $]0 ; +\infty[$. $g'(x) = 3 \times 1/2\sqrt{x} - 2 = 3/2\sqrt{x} - 2$. En $a = 4 : g(4) = 3 \times 2 - 8 = -2$ et $g'(4) = 3/4 - 2 = -5/4$. La tangente est $y = -5/4(x - 4) - 2 = -5/4x + 3$.

8. Approximation affine et applications

Près de a , la courbe est « presque confondue » avec sa tangente. Pour h proche de 0, on a donc l'approximation :

Approximation affine

$$f(a + h) \approx f(a) + f'(a) \times h$$

Exemple

Pour estimer $\sqrt{25,3}$: on prend $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 25$ et $h = 0,3$. Comme $f'(25) = 1/10$, on obtient $\sqrt{25,3} \approx 5 + 0,3 \times 0,1 = 5,03$. La calculatrice donne 5,0299..., l'approximation est très bonne.

Interprétations à connaître

- **Cinématique** : si $d(t)$ est la distance parcourue à l'instant t , alors $d'(t)$ est la vitesse instantanée.
- **Économie** : si $C(q)$ est le coût de fabrication de q objets, $C'(q)$ (coût marginal) est une bonne estimation du coût de l'objet suivant, $C(q + 1) - C(q)$.
- **Géométrie** : $f'(a)$ est la pente de la tangente à la courbe au point d'abscisse a .

À retenir

- Taux de variation de f entre a et b : $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ = pente de la sécante (AM).

Fiche en ligne : maths-facile.eu/derivation-nombre-derive-et-tangente-cours-1ere/ · Cours, exercices et contrôles

- Nombre dérivé : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ quand h tend vers 0 ; on simplifie par h avant de faire tendre h vers 0.
- Tangente en $A(a ; f(a))$: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Tangente horizontale si $f'(a) = 0$.
- Dérivées usuelles : $(k)' = 0$; $(x)' = 1$; $(x^n)' = nx^{n-1}$; $(1/x)' = -1/x^2$ ($x \neq 0$) ; $(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$ ($x > 0$, non dérivable en 0).
- Opérations : $(u + v)' = u' + v'$; $(ku)' = ku'$; $(uv)' = u'v + uv'$; $(1/v)' = -v'/v^2$; $(u/v)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.
- Composée affine : $(g(ax + b))' = a \times g'(ax + b)$.
- Approximation affine : $f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h$ pour h proche de 0.