

Développer et factoriser

Cours de maths – 3ème

Les lettres servent à écrire des calculs qui marchent pour **tous les nombres à la fois**. En 3ème, tu apprends à passer d'une écriture à une autre : **développer** (transformer un produit en somme) et **factoriser** (transformer une somme en produit). Ce sont les deux gestes de base du calcul littéral, indispensables pour résoudre des équations et démontrer des résultats.

1. Rappels : expressions littérales et distributivité

Une **expression littérale** contient une ou plusieurs lettres qui représentent des nombres. Pour **calculer sa valeur**, on remplace chaque lettre par un nombre. On rappelle les conventions : on n'écrit pas le signe $\times$ devant une lettre ou une parenthèse ($3x$ veut dire $3 \times x$), et x^2 veut dire $x \times x$.

Exemple

Pour $x = -2$, l'expression $5x + 3$ vaut $5 \times (-2) + 3 = -10 + 3 = -7$. L'expression x^2 vaut $(-2)^2 = 4$ et non -4 : on met les nombres négatifs entre parenthèses.

On sait aussi **réduire** une expression : on regroupe les termes de même nature. Par exemple $4x + 7 - x + 2 = 3x + 9$, mais on ne peut pas additionner $3x$ et $5x^2$: ce ne sont pas des termes de même nature.

Propriété : la distributivité simple

Pour tous nombres k , a et b :

$$k(a + b) = ka + kb \quad \text{et} \quad k(a - b) = ka - kb$$

Lue de gauche à droite, c'est **développer**. Lue de droite à gauche, c'est **factoriser**.

2. Développer avec la distributivité simple

Développer, c'est transformer un produit en une somme (ou une différence). On multiplie le facteur placé devant la parenthèse par **chaque terme** de la parenthèse, sans oublier les signes.

Méthode

Fiche en ligne : maths-facile.eu/developper-et-factoriser-cours-3eme/ · Cours, exercices et contrôles corrigés sur

1. Repère le facteur devant la parenthèse (avec son signe).
2. Multiplie-le par le premier terme, puis par le deuxième.
3. Fais attention aux signes : $(-) \times (-) = (+)$ et $(-) \times (+) = (-)$.
4. Réduis le résultat si c'est possible.

Exemples résolus

$$A = 6(x + 4) = 6 \times x + 6 \times 4 = 6x + 24$$

$$B = -3(2y - 5) = -3 \times 2y - 3 \times (-5) = -6y + 15$$

$$C = x(x + 7) = x \times x + x \times 7 = x^2 + 7x$$

$$D = 2x + 5(x - 3) = 2x + 5x - 15 = 7x - 15$$

Piège

Quand il y a un signe moins devant la parenthèse, il change le signe de **tous** les termes : $-(x - 4) = -x + 4$, et non $-x - 4$.

3. La double distributivité

Que faire quand on multiplie deux parenthèses ? On distribue chaque terme de la première parenthèse sur la seconde.

Propriété : double distributivité

Pour tous nombres a, b, c, d :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

On obtient 4 produits : chaque terme de la première parenthèse multiplie chaque terme de la seconde.

Exemple résolu

$$E = (2x + 3)(x - 5)$$

$$E = 2x \times x + 2x \times (-5) + 3 \times x + 3 \times (-5)$$

$$E = 2x^2 - 10x + 3x - 15$$

$$E = 2x^2 - 7x - 15$$

Astuce

Pour ne rien oublier, compte tes produits : deux termes dans chaque parenthèse donnent toujours **4 produits** avant la réduction. Écris-les tous, puis réduis seulement à la fin.

4. Les trois identités remarquables

Certains développements reviennent si souvent qu'on a intérêt à connaître le résultat par cœur. Ce sont les **identités remarquables** : des égalités vraies quelles que soient les valeurs de a et b .

Propriété : identités remarquables

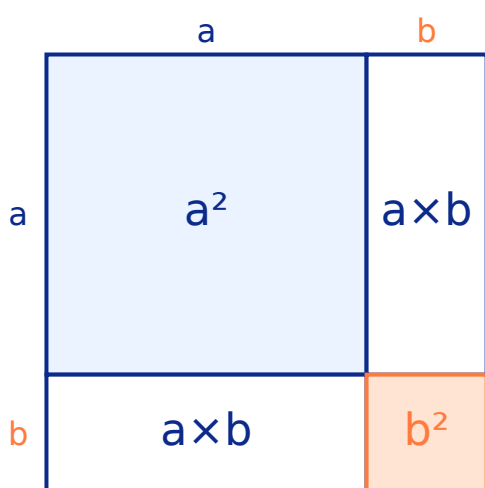
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Démonstration. On développe avec la double distributivité : $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Pour la différence : $(a - b)^2 = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Enfin $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$: les deux termes du milieu s'annulent.

On peut aussi « voir » la première identité. Un grand carré de côté $a + b$ se découpe en un carré d'aire a^2 , un carré d'aire b^2 et deux rectangles d'aire $a \times b$.



Piège classique

$(a + b)^2$ n'est **pas** égal à $a^2 + b^2$. Il manque le double produit $2ab$. Vérifie avec $a = 3$ et $b = 1$: $(3 + 1)^2 = 16$, alors que $3^2 + 1^2 = 10$.

5. Développer avec les identités remarquables

Méthode

1. Reconnais la forme : carré d'une somme, carré d'une différence, ou produit (somme)(différence).
2. Identifie a et b : ce sont les « premier terme » et « second terme ».
3. Applique la formule en mettant des parenthèses autour de a et de b quand ce sont des produits.
4. Calcule chaque morceau (carrés, double produit) puis réduis.

Exemples résolus

$(3x + 2)^2$: ici $a = 3x$ et $b = 2$.

$$(3x + 2)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$$

$$(5 - 4y)^2 = 5^2 - 2 \times 5 \times 4y + (4y)^2 = 25 - 40y + 16y^2$$

$$(2x + 7)(2x - 7) = (2x)^2 - 7^2 = 4x^2 - 49$$

Astuce de calcul mental

Les identités remarquables servent aussi avec des nombres : $52^2 = (50 + 2)^2 = 2500 + 200 + 4 = 2704$, et $49 \times 51 = (50 - 1)(50 + 1) = 2500 - 1 = 2499$.

6. Factoriser avec un facteur commun

Factoriser une somme, c'est l'écrire sous la forme d'un produit. C'est le chemin inverse du développement : on « remet en facteur » ce qui est commun à tous les termes.

Méthode

1. Repère le facteur commun : un nombre, une lettre, ou même une parenthèse.
2. Écris-le devant, puis ouvre une parenthèse.
3. À l'intérieur, écris ce qui reste de chaque terme une fois le facteur enlevé.
4. Vérifie en redéveloppant : tu dois retrouver l'expression de départ.

Exemples résolus

$$12x + 18 = 6 \times 2x + 6 \times 3 = 6(2x + 3)$$

$$x^2 - 5x = x \times x - x \times 5 = x(x - 5)$$

$(x + 2)(3x - 1) + (x + 2)(x + 4)$: le facteur commun est $(x + 2)$.

$$= (x + 2)[(3x - 1) + (x + 4)] = (x + 2)(4x + 3)$$

Piège

Quand un terme est *entièrement* le facteur commun, il reste un 1 : $7x + 7 = 7(x + 1)$ et non $7(x)$. Autre cas : $(x - 3)^2 + 2(x - 3) = (x - 3)(x - 3 + 2) = (x - 3)(x - 1)$.

7. Factoriser avec les identités remarquables

Quand il n'y a pas de facteur commun, on regarde si l'expression ressemble à une identité remarquable **lue à l'envers**.

Propriété (sens inverse)

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Méthode

1. Compte les termes. Une **différence de deux carrés** (deux termes) donne $(a + b)(a - b)$.
2. Avec trois termes, regarde si le premier et le dernier sont des carrés (a^2 et b^2), puis vérifie que le terme du milieu vaut $2ab$ (au signe près).
3. Le signe du terme du milieu donne le signe dans la parenthèse.

Exemples résolus

$$9x^2 - 25 = (3x)^2 - 5^2 = (3x + 5)(3x - 5)$$

$$x^2 + 14x + 49 : a = x, b = 7 \text{ et } 2 \times x \times 7 = 14x. \text{ Donc } = (x + 7)^2.$$

$$4y^2 - 12y + 9 : a = 2y, b = 3 \text{ et } 2 \times 2y \times 3 = 12y. \text{ Donc } = (2y - 3)^2.$$

$$(x + 1)^2 - 16 = (x + 1)^2 - 4^2 = (x + 1 - 4)(x + 1 + 4) = (x - 3)(x + 5)$$

Astuce

Mathbot te conseille : « Après chaque factorisation, redéveloppe dans ta tête ou teste

avec $x = 1$. Si les deux écritures donnent la même valeur, tu as de grandes chances d'avoir juste ! »

8. Démontrer une égalité et étudier un programme de calcul

Pour **prouver** qu'une égalité est vraie pour tous les nombres, tester quelques valeurs ne suffit pas. On développe (ou on factorise) pour montrer que les deux membres ont la même écriture réduite. À l'inverse, **un seul contre-exemple** suffit pour prouver qu'une égalité est fausse.

Exemple : un programme de calcul

Programme : choisir un nombre, lui ajouter 5, élever le résultat au carré, puis retrancher 25.

Avec x comme nombre de départ : $(x + 5)^2 - 25 = x^2 + 10x + 25 - 25 = x^2 + 10x = x(x + 10)$.

Conclusion : le programme revient à multiplier le nombre de départ par ce même nombre augmenté de 10. Test avec 3 : $(3 + 5)^2 - 25 = 64 - 25 = 39$ et $3 \times 13 = 39$.

La forme factorisée sert aussi à trouver quand un résultat est nul : un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul. Ici, $x(x + 10) = 0$ pour $x = 0$ ou $x = -10$.

Méthode pour démontrer

1. Écris le membre le plus compliqué.
2. Développe et réduis (ou factorise).
3. Compare avec l'autre membre et conclus par une phrase.

À retenir

- $k(a + b) = ka + kb$: développer va dans un sens, factoriser dans l'autre.
- $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$: quatre produits à écrire.
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.
- Factoriser : chercher un facteur commun (nombre, lettre ou parenthèse), ou reconnaître une identité remarquable.
- Une différence de deux carrés se factorise toujours : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.
- Pour démontrer une égalité vraie pour tout nombre, on développe ; pour la réfuter, un contre-exemple suffit.
- Vérifie toujours une factorisation en redéveloppant, ou avec une valeur test.