

Droites du plan et systèmes d'équations

Cours de maths - 2de

Dans le plan muni d'un repère, une droite peut se décrire de plusieurs façons : par un dessin, par une équation, par deux points ou par un point et une direction. Dans ce chapitre, tu vas apprendre à passer de l'une à l'autre, à reconnaître des droites parallèles ou sécantes, puis à résoudre des **systèmes de deux équations à deux inconnues**, qui permettent de résoudre de nombreux problèmes concrets. Mathbot t'attend pour la suite !

1. Rappels : repère, vecteurs et colinéarité

On travaille toujours dans un repère $(O ; I, J)$ du plan. Un point M a pour coordonnées $(x_M ; y_M)$. Pour deux points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$.

Colinéarité

Deux vecteurs $u(x ; y)$ et $v(x' ; y')$ sont **colinéaires** lorsque leurs coordonnées sont proportionnelles, c'est-à-dire lorsque $x y' - x' y = 0$. Ce nombre s'appelle le **déterminant** de u et v .

Exemple

$u(3 ; -6)$ et $v(-2 ; 4)$: $3 \times 4 - (-2) \times (-6) = 12 - 12 = 0$. Les vecteurs sont colinéaires (on a $v = -\frac{2}{3}u$).

Rappel : une droite non verticale représente une fonction affine $x \mapsto m x + p$. Une droite verticale n'est la courbe d'aucune fonction : elle est formée de tous les points de même abscisse.

2. Équation réduite d'une droite

Équation réduite

Toute droite d **non verticale** admet une unique équation de la forme **$y = m x + p$** .

- **m** est le **coefficient directeur** (ou pente) : quand x augmente de 1, y augmente de m ;
- **p** est l'**ordonnée à l'origine** : la droite coupe l'axe des ordonnées au point $(0 ; p)$;

p).

Une droite **verticale** a une équation de la forme $x = k$; une droite **horizontale** a une équation $y = p$ ($m = 0$).

Propriété (calcul du coefficient directeur)

Si $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ sont deux points d'une droite non verticale, avec $x_A \neq x_B$, alors son coefficient directeur est $m = (y_B - y_A) / (x_B - x_A)$.

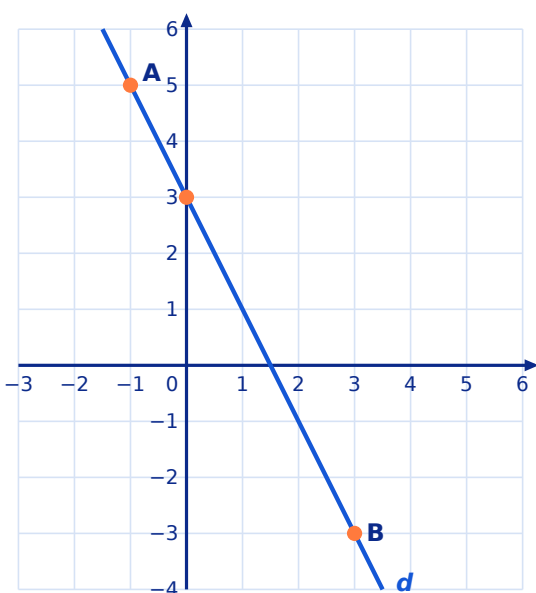
Démonstration. Les points A et B vérifient $y_A = m x_A + p$ et $y_B = m x_B + p$. En soustrayant, $y_B - y_A = m (x_B - x_A)$. Comme $x_B - x_A \neq 0$, on divise : $m = (y_B - y_A) / (x_B - x_A)$.

Méthode : trouver l'équation réduite de la droite (AB)

1. Vérifier que $x_A \neq x_B$ (sinon la droite est verticale : $x = x_A$).
2. Calculer $m = (y_B - y_A) / (x_B - x_A)$.
3. Écrire que A est sur la droite : $y_A = m x_A + p$, puis en déduire p.
4. Conclure et vérifier avec le point B.

Exemple

Soit $A(-1 ; 5)$ et $B(3 ; -3)$. Alors $m = (-3 - 5) / (3 - (-1)) = -8/4 = -2$. Comme A est sur la droite : $5 = -2 \times (-1) + p$, donc $p = 3$. L'équation réduite de (AB) est $y = -2x + 3$.
3. Contrôle avec B : $-2 \times 3 + 3 = -3$. ✓



Pour **tracer** une droite, il suffit de deux points : on calcule par exemple l'ordonnée pour deux valeurs de x, ou on part de $(0 ; p)$ et on utilise la pente.

Pièges

Le coefficient directeur se calcule avec la **même ordre** au numérateur et au dénominateur : $(y_B - y_A)$ et $(x_B - x_A)$, jamais l'un dans un sens et l'autre dans l'autre. Et une droite verticale n'a **pas** de coefficient directeur.

3. Vecteur directeur et équation cartésienne

Vecteur directeur

Un **vecteur directeur** d'une droite d est un vecteur non nul u qui a la même direction que d : si A et B sont deux points distincts de d , alors le vecteur AB en est un. Tous les vecteurs directeurs d'une droite sont colinéaires entre eux.

Équation cartésienne

Toute droite du plan admet une équation de la forme **$a x + b y + c = 0$** , où $(a ; b) \neq (0 ; 0)$. Réciproquement, tout ensemble de points vérifiant une telle équation est une droite. Le vecteur **$u(-b ; a)$** est alors un vecteur directeur de cette droite.

Démonstration. Soit d la droite passant par $A(x_A ; y_A)$ de vecteur directeur $u(\alpha ; \beta)$. Un point $M(x ; y)$ est sur d si et seulement si AM est colinéaire à u , c'est-à-dire $(x - x_A) \beta - (y - y_A) \alpha = 0$. En développant, $\beta x - \alpha y + (\alpha y_A - \beta x_A) = 0$. C'est une équation de la forme $a x + b y + c = 0$ avec $a = \beta$ et $b = -\alpha$: le vecteur $(\alpha ; \beta) = (-b ; a)$ est bien directeur.

Méthode : droite définie par un point et un vecteur directeur

1. Pour $u(\alpha ; \beta)$, poser $a = \beta$ et $b = -\alpha$: l'équation est $\beta x - \alpha y + c = 0$.
2. Remplacer x et y par les coordonnées du point connu pour trouver c .
3. Vérifier avec un second point (par exemple $A + u$).

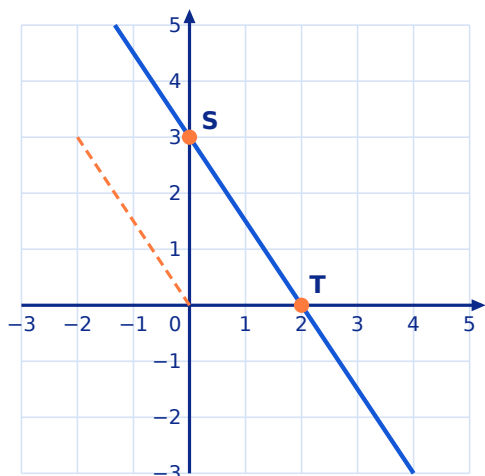
Exemple

La droite d passe par $A(1 ; -2)$ et a pour vecteur directeur $u(2 ; 3)$. Une équation est $3x - 2y + c = 0$. Avec A : $3 \times 1 - 2 \times (-2) + c = 0$, soit $7 + c = 0$, donc $c = -7$. **$d : 3x - 2y - 7 = 0$** . Vérification avec $A + u = (3 ; 1)$: $9 - 2 - 7 = 0$. ✓

Passer de la forme cartésienne à la forme réduite

Soit $3x + 2y - 6 = 0$. Un vecteur directeur est $u(-2 ; 3)$. On isole y : $2y = -3x + 6$, donc **$y = -\frac{3}{2}x + 3$** : $m = -\frac{3}{2}$ (c'est $-a/b$) et $p = 3$. La droite coupe les axes en $(0 ;$

3) et (2 ; 0).



Astuce

Si $b \neq 0$, le coefficient directeur est $m = -\mathbf{a/b}$ et l'ordonnée à l'origine est $p = -\mathbf{c/b}$. Si $b = 0$, l'équation devient $x = -\mathbf{c/a}$: la droite est verticale.

4. Droites parallèles, droites sécantes

Propriété

Deux droites d et d' sont **parallèles** (ou confondues) si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

- Avec les équations réduites $y = m x + p$ et $y = m' x + p'$: parallèles $\Leftrightarrow \mathbf{m = m'}$; elles sont confondues si de plus $p = p'$.
- Avec les équations cartésiennes $a x + b y + c = 0$ et $a' x + b' y + c' = 0$: parallèles $\Leftrightarrow \mathbf{a b' - a' b = 0}$.

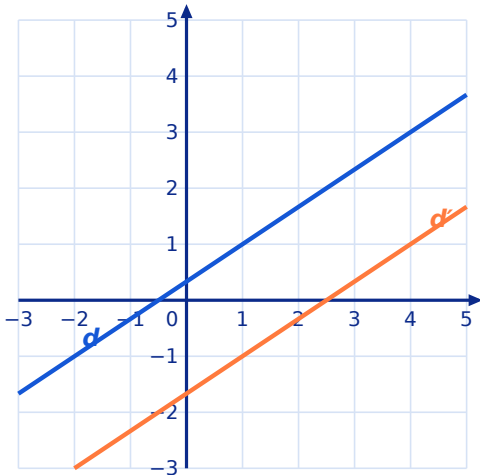
Si $a b' - a' b \neq 0$, les droites sont **sécantes** : elles ont un seul point commun.

Méthode : étudier la position de deux droites

1. Calculer le déterminant $a b' - a' b$ (ou comparer les coefficients directeurs).
2. S'il est non nul : sécantes ; on trouve le point d'intersection en résolvant le système formé par les deux équations.
3. S'il est nul : parallèles. Prendre un point de la première droite et tester s'il est sur la seconde : oui $\rightarrow$ confondues, non $\rightarrow$ strictement parallèles.

Exemple

$d : 2x - 3y + 1 = 0$ et $d' : 4x - 6y - 5 = 0$. Déterminant : $2 \times (-6) - 4 \times (-3) = -12 + 12 = 0$, donc $d \parallel d'$. Le point $(1 ; 1)$ est sur d ($2 - 3 + 1 = 0$) mais pas sur d' ($4 - 6 - 5 = -7 \neq 0$). Les droites sont **strictement parallèles**.



Piège

Deux droites de même coefficient directeur ne sont pas forcément distinctes : si elles ont aussi la même ordonnée à l'origine, elles sont confondues. Et deux droites verticales ($x = 2$ et $x = 5$) sont parallèles même si elles n'ont pas de coefficient directeur.

5. Systèmes de deux équations à deux inconnues

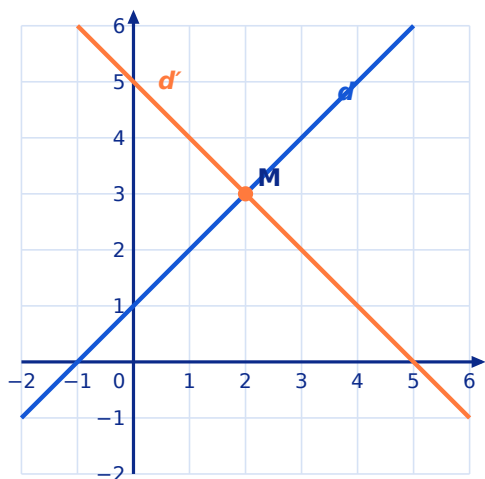
Système 2×2

Un **système de deux équations à deux inconnues** x et y s'écrit $\{ a x + b y = c ; a' x + b' y = c' \}$. Une **solution** est un couple $(x ; y)$ qui vérifie **les deux** équations à la fois. Résoudre le système, c'est trouver toutes ses solutions.

Chaque équation $a x + b y = c$ (avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$) est celle d'une droite. Résoudre le système revient donc à chercher les points communs à deux droites.

Nombre de solutions

- Droites **sécantes** ($a b' - a' b \neq 0$) : **une seule solution**, les coordonnées du point d'intersection.
- Droites **strictement parallèles** : **aucune solution**.
- Droites **confondues** : **une infinité de solutions** (tous les points de la droite).



Résolution graphique

On trace les deux droites (en isolant y si besoin) et on lit les coordonnées de leur point d'intersection. La lecture est **approchée** : on vérifie toujours en remplaçant dans les deux équations.

6. Résoudre un système par substitution

Méthode

1. Choisir une équation où une inconnue est facile à isoler (coefficient 1 ou -1) et l'exprimer en fonction de l'autre.
2. **Substituer** cette expression dans l'autre équation : on obtient une équation à une seule inconnue.
3. La résoudre.
4. Revenir à l'expression de la première inconnue pour la calculer.
5. Vérifier dans les deux équations et conclure par une phrase : « Le couple solution est (... ; ...) ».

Exemple résolu

Résoudre $\{ x + 2y = 7 ; 3x - y = 7 \}$.

Dans la seconde équation, on isole y : $y = 3x - 7$.

On remplace dans la première : $x + 2(3x - 7) = 7$, soit $7x - 14 = 7$, donc $7x = 21$ et $x = 3$.

Alors $y = 3 \times 3 - 7 = 2$.

Vérification : $3 + 2 \times 2 = 7$ ✓ et $3 \times 3 - 2 = 7$ ✓. **Solution : (3 ; 2).**

7. Résoudre un système par combinaison

Quand aucune inconnue ne s'isole facilement, on **combine** les équations pour faire disparaître une inconnue. On peut multiplier une équation entière par un nombre non nul, puis additionner ou soustraire deux équations membre à membre.

Méthode

1. Multiplier les équations par des nombres bien choisis pour que les coefficients d'une même inconnue soient **opposés** (ou égaux).
2. Additionner (ou soustraire) les équations : une inconnue disparaît.
3. Résoudre l'équation obtenue.
4. Remplacer la valeur trouvée dans l'une des équations de départ pour trouver l'autre inconnue.
5. Vérifier dans les deux équations.

Exemple résolu

Résoudre $\{ 3x + 4y = 2 ; 5x - 6y = 16 \}$.

Pour éliminer y , on multiplie la première équation par 3 et la seconde par 2 : $\{ 9x + 12y = 6 ; 10x - 12y = 32 \}$.

On additionne : $19x = 38$, donc $x = 2$.

Dans la première équation : $3 \times 2 + 4y = 2$, donc $4y = -4$ et $y = -1$.

Vérification : $5 \times 2 - 6 \times (-1) = 16$ ✓. **Solution : (2 ; -1).**

Pièges

Quand on multiplie une équation, on multiplie **tous** ses termes, y compris le second membre. Quand on soustrait, attention aux signes : $-(-6y) = +6y$. Si, en combinant, les deux inconnues disparaissent, regarde le résultat : une égalité fausse ($0 = 5$) signifie « aucune solution », une égalité vraie ($0 = 0$) signifie « une infinité de solutions ».

8. Résoudre un problème avec un système

Méthode en quatre temps

1. **Choisir les inconnues** : « Soit x ... et y ... » (avec leur unité).
2. **Mettre en équations** : traduire chaque information de l'énoncé par une équation.

3. **Résoudre** le système (substitution ou combinaison).
4. **Vérifier** avec l'énoncé et conclure par une **phrase réponse**.

Exemple résolu

Au parc de loisirs, un groupe de 3 adultes et 2 enfants paie 31 €. Un autre groupe de 2 adultes et 5 enfants paie 39 €. Quel est le prix d'une entrée adulte et d'une entrée enfant ?

Soit a le prix d'une entrée adulte et e celui d'une entrée enfant, en euros. On obtient $\{ 3a + 2e = 31 ; 2a + 5e = 39 \}$.

On multiplie la première équation par 2 et la seconde par 3 : $\{ 6a + 4e = 62 ; 6a + 15e = 117 \}$. En soustrayant : $11e = 55$, donc $e = 5$. Puis $3a + 10 = 31$, donc $a = 7$.

Vérification : $2 \times 7 + 5 \times 5 = 39$ ✓. **Une entrée adulte coûte 7 € et une entrée enfant 5 €.**

Astuce de Mathbot

Quand un problème parle de « deux tarifs » ou de « deux trajets qui se croisent », trace les deux droites correspondantes : leur point d'intersection donne la réponse, et le graphique aide à contrôler le calcul !

À retenir

- Droite non verticale : $y = mx + p$; $m = (y_B - y_A) / (x_B - x_A)$ est le coefficient directeur, p l'ordonnée à l'origine. Droite verticale : $x = k$.
- Équation cartésienne : $ax + by + c = 0$; vecteur directeur $u(-b ; a)$; si $b \neq 0$, $m = -a/b$.
- Deux droites sont **parallèles** si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires ($a'b - a'b' = 0$, ou $m = m'$) ; sinon elles sont **sécantes**.
- Un système 2×2 a **une** solution (sécantes), **aucune** (parallèles distinctes) ou **une infinité** (confondues).
- Substitution : isoler une inconnue, la remplacer. Combinaison : multiplier pour éliminer une inconnue, puis additionner.
- Toujours **vérifier** dans les deux équations et rédiger une phrase de conclusion.