

Équations de droites et de cercles

Corrigé des exercices - 1ère

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Lire une équation ★★★

- Les coefficients de x et y donnent $\mathbf{n}(3 ; 4)$. Un vecteur directeur est $\mathbf{u}(-4 ; 3)$ (vérification : $3 \times (-4) + 4 \times 3 = 0$).
- $A : 0 + 12 - 12 = 0$, donc $A \in d$. $B : 6 + 4 - 12 = -2 \neq 0$, donc $B \notin d$. $C : 12 + 0 - 12 = 0$, donc $C \in d$.
- Avec $x = 0 : 4y = 12$, $y = 3$, point $(0 ; 3)$. Avec $y = 0 : 3x = 12$, $x = 4$, point $(4 ; 0)$. La droite coupe l'axe des ordonnées en $(0 ; 3)$ et l'axe des abscisses en $(4 ; 0)$.

2 Point et vecteur normal ★★★

- Pour $M(x ; y)$, $\mathbf{AM}(x - 2 ; y + 1)$. Alors $\mathbf{AM} \cdot \mathbf{n} = 0$ donne $3(x - 2) + 2(y + 1) = 0$, soit $3x + 2y - 4 = 0$. Vérification avec $A : 6 - 2 - 4 = 0$ ✓.
- $\mathbf{BM}(x + 1 ; y - 4)$. On obtient $1(x + 1) - 5(y - 4) = 0$, soit $x - 5y + 21 = 0$. Vérification avec $B : -1 - 20 + 21 = 0$ ✓.

3 Droite par deux points ★★★

- $\mathbf{AB}(3 ; 6)$, colinéaire à $(1 ; 2)$. Un vecteur normal est $(2 ; -1)$. Équation : $2x - y + c = 0$; avec $A : 2 - 2 + c = 0$, donc $c = 0$. La droite (AB) a pour équation $2x - y = 0$. Vérification avec $B : 8 - 8 = 0$ ✓.
- $\mathbf{AB}(3 ; -4)$, donc un vecteur normal est $(4 ; 3)$. Équation : $4x + 3y + c = 0$; avec $A : -8 + 9 + c = 0$, donc $c = -1$. La droite (AB) a pour équation $4x + 3y - 1 = 0$. Vérification avec $B : 4 - 3 - 1 = 0$ ✓.

4 Changer de forme ★★★

- $2x - 3y + 6 = 0 \Leftrightarrow 3y = 2x + 6 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x + 2$.
 - $-4x + 2y - 10 = 0 \Leftrightarrow 2y = 4x + 10 \Leftrightarrow y = 2x + 5$.
 - $5x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = 3$: droite verticale, elle n'a pas d'équation réduite.
- $y = -\frac{1}{2}x + 3 \Leftrightarrow 2y = -x + 6 \Leftrightarrow x + 2y - 6 = 0$.

5 Vrai ou faux ? ★★★

- a. **Vrai** : les coefficients de x et y sont 2 et 1.
- b. **Faux** : un vecteur normal est $(2 ; 3)$. Or $(3 ; -2)$ est orthogonal à $(2 ; 3)$ puisque $2 \times 3 + 3 \times (-2) = 0$: c'est un vecteur *directeur*.
- c. **Vrai** : $4 \times (-3) - 2 \times (-6) = -12 + 12 = 0$, donc les vecteurs normaux sont colinéaires. Les constantes ne sont pas proportionnelles (la seconde équation multipliée par 2 donne $4x - 6y + 10 = 0$), les droites sont parallèles et distinctes.
- d. **Vrai** : avec $x = 0$ et $y = 0$, $3 \times 0 + 0 = 0$.
- e. **Vrai** : $1 \times 2 + (-2) \times 1 = 0$, les vecteurs normaux $(1 ; -2)$ et $(2 ; 1)$ sont orthogonaux.

6 Lire une équation de cercle ★★★

- a. Centre $\Omega(3 ; -2)$, rayon $\sqrt{25} = 5$.
- b. Centre $O(0 ; 0)$, rayon $\sqrt{7} \approx 2,65$.
- c. Centre $\Omega(-1 ; 4)$, rayon $\sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3,46$.

Pour $A(6 ; 2)$ et le premier cercle : $(6 - 3)^2 + (2 + 2)^2 = 9 + 16 = 25$ ✓, donc A appartient au cercle.

7 Écrire une équation de cercle ★★★

- a. $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 16$.
- b. Le rayon est $\Omega A = \sqrt{((4 - 1)^2 + (5 - 1)^2)} = \sqrt{(9 + 16)} = \sqrt{25} = 5$. L'équation est $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

8 Parallèle et perpendiculaire ★★★

Parallèle : même vecteur normal $(2 ; -5)$, donc $2x - 5y + c = 0$. Avec A : $6 + 10 + c = 0$, donc $c = -16$. Équation : $2x - 5y - 16 = 0$.

Perpendiculaire : le vecteur $(2 ; -5)$ est normal à d , un vecteur directeur de d est $(5 ; 2)$. C'est un vecteur normal de la perpendiculaire : $5x + 2y + c = 0$. Avec A : $15 - 4 + c = 0$, donc $c = -11$. Équation : $5x + 2y - 11 = 0$. Vérification : $2 \times 5 + (-5) \times 2 = 0$ ✓ (les droites sont bien perpendiculaires).

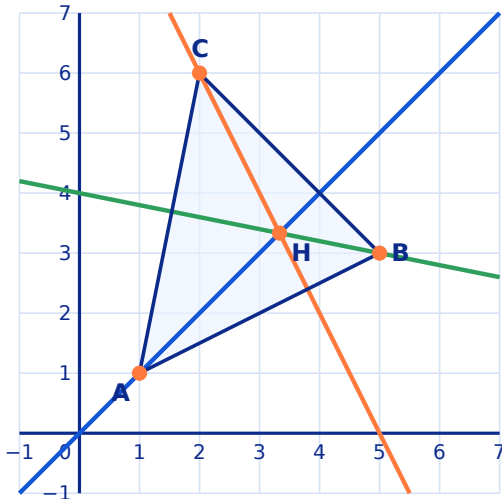
9 Hauteurs d'un triangle ★★★

- a. La hauteur issue de A est perpendiculaire à (BC) : $\mathbf{BC}(-3 ; 3)$ est un vecteur normal, donc $-3x + 3y + c = 0$; avec A : $-3 + 3 + c = 0$, $c = 0$. On simplifie : $x - y = 0$.

La hauteur issue de B est perpendiculaire à (AC) : $\mathbf{AC}(1 ; 5)$ est normal, donc $x + 5y + c = 0$; avec B : $5 + 15 + c = 0$, $c = -20$. Équation : $x + 5y - 20 = 0$.

b. On résout : $y = x$, donc $x + 5x = 20$, $x = \mathbf{10/3}$ et $y = \mathbf{10/3}$. Donc $H(\mathbf{10/3} ; \mathbf{10/3})$.

c. $\mathbf{AB}(4 ; 2)$ est normal à la hauteur issue de C : $4x + 2y + c = 0$, avec C : $8 + 12 + c = 0$, $c = -20$, soit $2x + y - 10 = 0$. Pour H : $2 \times \mathbf{10/3} + \mathbf{10/3} - 10 = 10 - 10 = 0$ ✓. Les trois hauteurs sont concourantes en H, l'orthocentre.



10 Médiatrice d'un segment ★★★

Le milieu de [AB] est I(2 ; 3). Le vecteur $\mathbf{AB}(6 ; 2)$ est normal à la médiatrice, ainsi que (3 ; 1). Équation : $3x + y + c = 0$; avec I : $6 + 3 + c = 0$, $c = -9$. La médiatrice a pour équation $3x + y - 9 = 0$.

M(0 ; 9) : $0 + 9 - 9 = 0$, donc M est sur la médiatrice. Vérifions : $MA^2 = (-1)^2 + (2 - 9)^2 = 1 + 49 = 50$ et $MB^2 = 5^2 + (4 - 9)^2 = 25 + 25 = 50$. Donc $MA = MB = \sqrt{50}$ ✓.

11 Intersection de droites ★★★

a. De la seconde équation, $y = 4x - 7$. On remplace dans la première : $2x + 3(4x - 7) - 7 = 0$, soit $14x - 28 = 0$, donc $x = 2$ et $y = 1$. Le point d'intersection est (2 ; 1). Vérification : $4 + 3 - 7 = 0$ et $8 - 1 - 7 = 0$ ✓.

b. Vecteurs normaux (3 ; -6) et (1 ; -2) : $3 \times (-2) - 1 \times (-6) = -6 + 6 = 0$, ils sont colinéaires, donc les droites sont parallèles. Le point (5 ; 0) est sur la seconde mais $15 + 2 \neq 0$: il n'est pas sur la première. Les droites sont **strictement parallèles**, elles ne sont pas sécantes.

12 Un paramètre ★★★

Vecteurs normaux : (m ; 2) pour d, (3 ; 1) pour d'.

a. (1) Parallèles $\Leftrightarrow m \times 1 - 3 \times 2 = 0 \Leftrightarrow m = 6$.

(2) Perpendiculaires $\Leftrightarrow 3m + 2 \times 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{2}{3}$.

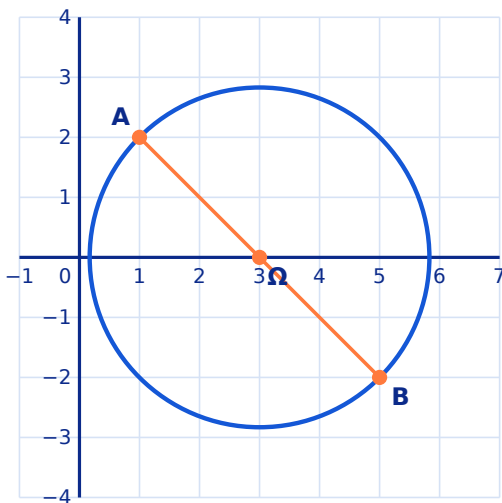
b. $3 \times 8 + (-4) \times 6 = 24 - 24 = 0$, donc les vecteurs normaux $(3 ; -4)$ et $(8 ; 6)$ sont orthogonaux : les droites sont **perpendiculaires**.

13 Cercle de diamètre [AB] ★★★

Première méthode. Le centre est le milieu $\Omega(3 ; 0)$. Le rayon vérifie $r^2 = \Omega A^2 = (1 - 3)^2 + (2 - 0)^2 = 8$. Équation : $(x - 3)^2 + y^2 = 8$. On vérifie pour B : $4 + 4 = 8$ ✓.

Seconde méthode. $\mathbf{MA} \cdot \mathbf{MB} = (1 - x)(5 - x) + (2 - y)(-2 - y) = x^2 - 6x + 5 + y^2 - 4 = x^2 + y^2 - 6x + 1$.

Comparaison. $(x - 3)^2 + y^2 - 8 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8 = x^2 + y^2 - 6x + 1$: les deux équations sont équivalentes.



14 Reconnaître un ensemble ★★★

- a. $(x - 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 - 3 = 0$, soit $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$: cercle de centre $(2 ; -3)$ et de rayon 4.
- b. $(x + 1)^2 - 1 + (y - 4)^2 - 16 + 20 = 0$, soit $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = -3$. Une somme de carrés ne peut pas être négative : **aucun point**, l'ensemble est vide.
- c. $(x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 + 5 = 0$, soit $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0$. Cela impose $x = 1$ et $y = -2$: l'ensemble est **le point $(1 ; -2)$** .

15 Tangente en un point ★★★

$(1 + 1)^2 + (7 - 3)^2 = 4 + 16 = 20$ ✓, $A \in C$. Le centre est $\Omega(-1 ; 3)$ et $\Omega A(2 ; 4)$, colinéaire à $(1 ; 2)$. La tangente en A est perpendiculaire à (ΩA) : $(x - 1) + 2(y - 7) = 0$,

soit $x + 2y - 15 = 0$. Vérification avec A : $1 + 14 - 15 = 0$ ✓.

16 Droite et cercle sécants ★★★

On remplace : $x^2 + (x + 1)^2 = 25$, soit $2x^2 + 2x - 24 = 0$, ou $x^2 + x - 12 = 0$. $\Delta = 1 + 48 = 49$, donc $x = (-1 - 7)/2 = -4$ ou $x = (-1 + 7)/2 = 3$. Avec $y = x + 1$: les points sont $(-4 ; -3)$ et $(3 ; 4)$. Vérification : $16 + 9 = 25$ et $9 + 16 = 25$ ✓.

17 Trois droites, un cercle ★★★

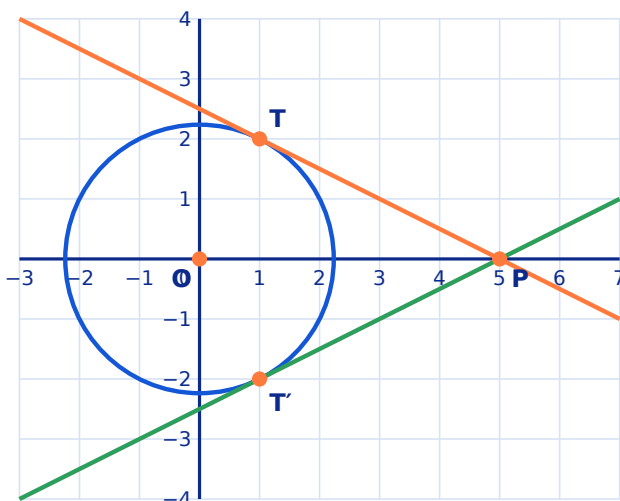
$d_1 : y = 17 - 3x$. $(x - 2)^2 + (16 - 3x)^2 = 10 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + 9x^2 - 96x + 256 - 10 = 0$
 $\Leftrightarrow 10x^2 - 100x + 250 = 0 \Leftrightarrow 10(x - 5)^2 = 0$. Une seule solution $x = 5$, $y = 2$: d_1 est **tangente** en $(5 ; 2)$.

$d_2 : (x - 2)^2 + x^2 = 10 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$. $\Delta = 4 + 12 = 16$, $x = -1$ ou $x = 3$: **deux points**, $(-1 ; 0)$ et $(3 ; 4)$.

$d_3 : y = 30 - 3x$. $(x - 2)^2 + (29 - 3x)^2 = 10 \Leftrightarrow 10x^2 - 178x + 835 = 0$. $\Delta = 178^2 - 4 \times 10 \times 835 = 31\,684 - 33\,400 = -1\,716 < 0$: **aucun point**.

18 Tangentes issues d'un point ★★★

- La droite (PT) est tangente en T si et seulement si elle est perpendiculaire au rayon (OT), c'est-à-dire si $\mathbf{OT} \cdot \mathbf{PT} = 0$, avec T sur le cercle ($x^2 + y^2 = 5$).
- $\mathbf{OT}(x ; y)$ et $\mathbf{PT}(x - 5 ; y)$: $x(x - 5) + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 5x = 0$. Comme $x^2 + y^2 = 5$, on obtient $5 - 5x = 0$, donc $x = 1$. Puis $y^2 = 5 - 1 = 4$: $y = 2$ ou $y = -2$. Les points de contact sont $T(1 ; 2)$ et $T'(1 ; -2)$.
- En T : normal $\mathbf{OT}(1 ; 2)$, tangente $x + 2y - 5 = 0$ (car $1 + 4 = 5$). En T' : $x - 2y - 5 = 0$. Les deux passent bien par $P(5 ; 0)$: $5 - 5 = 0$ ✓.



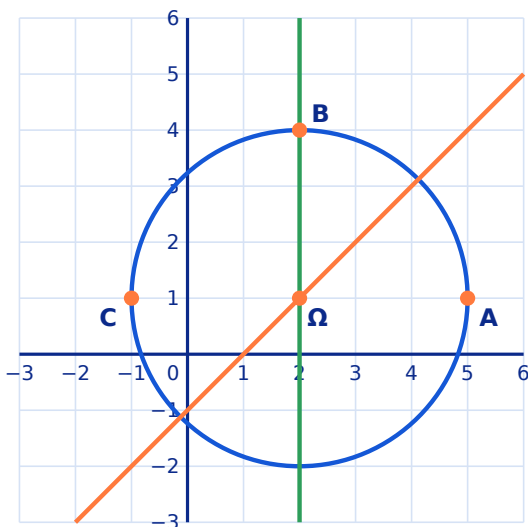
19 Cercle passant par trois points ★★★

Le centre est sur la médiatrice de chaque côté.

[AC] : A et C ont la même ordonnée 1, le milieu est (2 ; 1), **AC**(-6 ; 0) est normal à la médiatrice : c'est la droite $x = 2$.

[AB] : milieu (3,5 ; 2,5), **AB**(-3 ; 3) normal, donc (-1 ; 1) aussi : $-x + y + c = 0$, et $-3,5 + 2,5 + c = 0$ donne $c = 1$. Médiatrice : $y = x - 1$.

Intersection : $x = 2$ et $y = 1$. Le centre est $\Omega(2 ; 1)$. Rayon : $\Omega A = 3$; contrôle : $\Omega B = \sqrt{(0 + 9)} = 3$ et $\Omega C = 3$ ✓. Le cercle a pour équation $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$.



20 Valeurs de m pour une tangente ★★★

On remplace : $x^2 + (x + m)^2 = 8 \Leftrightarrow 2x^2 + 2mx + m^2 - 8 = 0$. La droite est tangente si et seulement si $\Delta = 0$: $\Delta = (2m)^2 - 4 \times 2 \times (m^2 - 8) = 4m^2 - 8m^2 + 64 = 64 - 4m^2$. $\Delta = 0 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow m = 4$ ou $m = -4$.

Pour $m = 4$: $2x^2 + 8x + 8 = 2(x + 2)^2 = 0$, $x = -2$, $y = 2$: contact en $(-2 ; 2)$. Pour $m = -4$: $2(x - 2)^2 = 0$, contact en $(2 ; -2)$. Contrôle : $4 + 4 = 8$ ✓.

21 Cercle tangent à une droite ★★★

Le point de contact H est le pied de la perpendiculaire à d passant par Ω . Un vecteur normal de d est (3 ; -4), directeur de cette perpendiculaire, dont un vecteur normal est (4 ; 3) : $4x + 3y + c = 0$, avec Ω : $4 + 6 + c = 0$, donc $4x + 3y - 10 = 0$.

H vérifie $3x - 4y = 10$ et $4x + 3y = 10$. En multipliant la première par 3 et la seconde par 4 : $9x - 12y = 30$ et $16x + 12y = 40$. On additionne : $25x = 70$, $x = \mathbf{14/5}$, puis $y = (10 - 4 \times \mathbf{14/5})/3 = \mathbf{-2/5}$. H(**14/5** ; **-2/5**).

Rayon : $\Omega H^2 = (9/5)^2 + (12/5)^2 = 81/25 + 144/25 = 9$, donc $r = 3$. Le cercle a pour équation $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

22 Intersection de deux cercles ★★★

On développe $C_2 : x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$. En retranchant l'équation de $C_1 (x^2 + y^2 = 25)$, il reste $-10x - 10y + 50 = 0$, soit $x + y = 5$: un point commun appartient à cette droite. On substitue $y = 5 - x$ dans $C_1 : x^2 + (5 - x)^2 = 25 \Leftrightarrow 2x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 5) = 0$. Donc $x = 0$ (et $y = 5$) ou $x = 5$ (et $y = 0$). Les cercles se coupent en $(0 ; 5)$ et $(5 ; 0)$ (vérification : $25 = 25$ et $0 + 25 = 25$ pour C_2 ✓).

23 Problème : l'arroseur ★★★

- a. **MN**(4 ; -2), colinéaire à (2 ; -1), donc un vecteur normal est (1 ; 2) : $x + 2y + c = 0$, et avec M : $3 + 14 + c = 0$, $c = -17$. Allée : $x + 2y - 17 = 0$ (contrôle avec N : $7 + 10 - 17 = 0$ ✓).
- b. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$.
- c. On pose $x = 17 - 2y$: $(14 - 2y)^2 + (y - 2)^2 = 25 \Leftrightarrow 196 - 56y + 4y^2 + y^2 - 4y + 4 - 25 = 0 \Leftrightarrow 5y^2 - 60y + 175 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 12y + 35 = 0 \Leftrightarrow (y - 5)(y - 7) = 0$. On retrouve M(3 ; 7) et N(7 ; 5), qui sont donc les points d'intersection. La longueur mouillée est $MN = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4,5$ m. **L'eau tombe sur environ 4,5 m d'allée.**

