

Équations de droites et de cercles

Cours de maths - 1ère

En 2de, tu as décrit des droites avec des équations réduites $y = mx + p$. Cette écriture a un défaut : elle ne sait pas parler des droites verticales, et elle cache l'orthogonalité. En 1ère, tu découvres l'**équation cartésienne** $ax + by + c = 0$, qui s'obtient très naturellement avec un **vecteur normal**. Grâce à elle, parallélisme et perpendicularité se testent en une ligne de calcul. Tu l'étendras ensuite aux **cercles** : équation, tangente, intersection avec une droite. Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un **repère orthonormé** $(O ; I, J)$.

1. Rappels : coordonnées, distance et orthogonalité

Pour deux points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$, le vecteur **AB** a pour coordonnées $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$. Dans ce chapitre, les vecteurs sont écrits en gras : **u**, **n**, **AB**.

Distance et produit scalaire en coordonnées

Dans un repère orthonormé, la distance AB est $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. Pour **u**($x ; y$) et **v**($x' ; y'$), le **produit scalaire** est **u**·**v** = $xx' + yy'$.

Deux critères à retenir

Les vecteurs non nuls **u** et **v** sont **orthogonaux** si et seulement si **u**·**v** = 0. Ils sont **colinéaires** si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

Exemple

u(4 ; -3) et **v**(3 ; 4) : **u**·**v** = $4 \times 3 + (-3) \times 4 = 0$, donc ils sont orthogonaux. Par ailleurs **u**(4 ; -3) et **w**(-8 ; 6) sont colinéaires car $4 \times 6 - (-8) \times (-3) = 24 - 24 = 0$.

2. Vecteur directeur et vecteur normal d'une droite

Vecteur directeur, vecteur normal

Un **vecteur directeur** d'une droite d est un vecteur non nul **u** qui donne sa direction : si A et B sont deux points distincts de d , alors **AB** est colinéaire à **u**. Un **vecteur normal** à d est un vecteur non nul **n** orthogonal à un (donc à tous les) vecteur(s) directeur(s) de d .

Une droite possède une infinité de vecteurs directeurs (tous colinéaires entre eux) et une infinité de vecteurs normaux (eux aussi colinéaires entre eux). Une droite est entièrement déterminée par **un point et un vecteur normal**, exactement comme par un point et un vecteur directeur.

Caractérisation par un vecteur normal

Soit A un point et $\mathbf{n}$ un vecteur non nul. L'ensemble des points M tels que $\mathbf{AM} \cdot \mathbf{n} = 0$ est la droite passant par A et de vecteur normal $\mathbf{n}$.

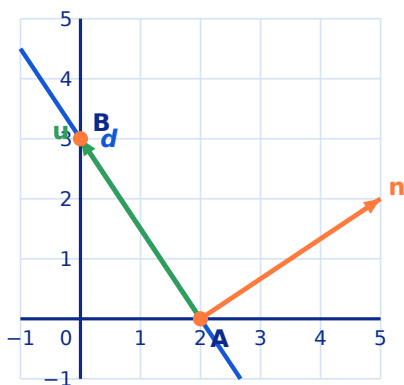
C'est évident sur un dessin : M est sur la droite si et seulement si $\mathbf{AM}$ est « couché » le long de la droite, donc perpendiculaire à $\mathbf{n}$ (le cas $M = A$ donne le vecteur nul, orthogonal à tout).

3. Équation cartésienne d'une droite

Théorème

- (1) Toute droite d du plan admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$, avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$. Le vecteur $\mathbf{n}(a ; b)$ est alors un vecteur normal à d , et $\mathbf{u}(-b ; a)$ en est un vecteur directeur.
- (2) Réciproquement, si $(a ; b) \neq (0 ; 0)$, l'ensemble des points $M(x ; y)$ vérifiant $ax + by + c = 0$ est une droite.

Démonstration. (1) Soit $A(x_A ; y_A)$ un point de d et $\mathbf{n}(a ; b)$ un vecteur normal. Alors $M(x ; y)$ appartient à $d \Leftrightarrow \mathbf{AM} \cdot \mathbf{n} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \Leftrightarrow ax + by + c = 0$, en posant $c = -ax_A - by_A$. Le vecteur $(-b ; a)$ est orthogonal à $(a ; b)$ car $a \times (-b) + b \times a = 0$, c'est donc un vecteur directeur. (2) L'équation a au moins une solution : $(-c/a ; 0)$ si $a \neq 0$, sinon $(0 ; -c/b)$. Notons $A(x_A ; y_A)$ une solution. En soustrayant $ax_A + by_A + c = 0$, l'équation devient $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$, c'est-à-dire $\mathbf{AM} \cdot \mathbf{n} = 0$: on reconnaît la droite passant par A de vecteur normal $\mathbf{n}(a ; b)$. ■



Exemple

La droite $d : 3x + 2y - 6 = 0$ a pour vecteur normal $\mathbf{n}(3 ; 2)$ et pour vecteur directeur $\mathbf{u}(-2 ; 3)$. Elle passe par $A(2 ; 0)$ car $3 \times 2 + 0 - 6 = 0$ et par $B(0 ; 3)$ car $0 + 2 \times 3 - 6 = 0$. Sur la figure, $\mathbf{n}$ et $\mathbf{u}$ sont tracés depuis A : ils forment bien un angle droit.

Pièges à éviter

Une droite n'a pas une seule équation cartésienne : on peut multiplier tous les coefficients par un même réel non nul. Ainsi $3x + 2y - 6 = 0$ et $6x + 4y - 12 = 0$ décrivent la même droite. Ne confonds pas non plus $\mathbf{n}(a ; b)$ (normal) et $\mathbf{u}(-b ; a)$ (directeur) : les coefficients de x et y donnent le vecteur *normal*.

Cas particuliers et lien avec l'équation réduite

Si $b = 0$, l'équation est $x = k$: droite **verticale**. Si $a = 0$, c'est $y = k$: droite **horizontale**. Si $b \neq 0$, on isole y : $y = -\mathbf{a/b}x - \mathbf{c/b}$, de coefficient directeur $-\mathbf{a/b}$ et d'ordonnée à l'origine $-\mathbf{c/b}$.

4. Déterminer une équation cartésienne : deux méthodes

Méthode 1 : avec un point et un vecteur normal

1. On écrit que $\mathbf{AM} \cdot \mathbf{n} = 0$ pour $M(x ; y)$.
2. On développe et on réduit.
3. On vérifie en remplaçant les coordonnées de A .

Exemple

Droite passant par $A(1 ; -3)$ de vecteur normal $\mathbf{n}(2 ; 5)$. Pour $M(x ; y)$, $\mathbf{AM}(x - 1 ; y + 3)$. La condition $\mathbf{AM} \cdot \mathbf{n} = 0$ donne $2(x - 1) + 5(y + 3) = 0$, soit $2x + 5y + 13 = 0$.
Vérification : $2 \times 1 + 5 \times (-3) + 13 = 0$ ✓.

Méthode 2 : avec deux points

1. On calcule $\mathbf{AB}$, qui est un vecteur directeur.
2. On en déduit un vecteur normal : si $\mathbf{AB}(p ; q)$, alors $\mathbf{n}(q ; -p)$ convient.
3. On continue comme dans la méthode 1, puis on vérifie avec le second point.

Exemple

$A(-1 ; 2)$ et $B(3 ; 4)$. $\mathbf{AB}(4 ; 2)$, donc $\mathbf{n}(2 ; -4)$ convient, ou plus simplement $\mathbf{n}(1 ; -2)$.
L'équation est $x - 2y + c = 0$; avec A : $-1 - 4 + c = 0$, donc $c = 5$. La droite (AB) a

pour équation $x - 2y + 5 = 0$. Vérification avec B : $3 - 8 + 5 = 0$ ✓.

Astuce de Mathbot

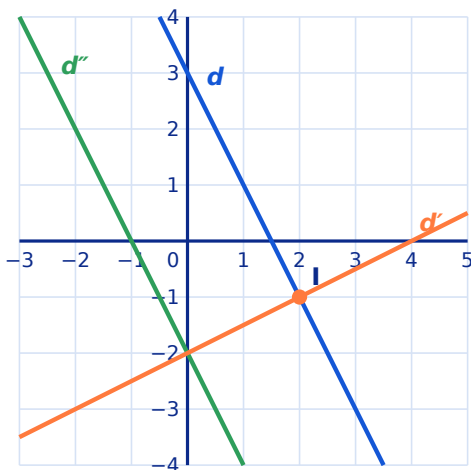
Pour ne pas te tromper de signe, calcule c en dernier : tu écris $ax + by + c = 0$ avec les bons a et b , puis tu remplaces x et y par les coordonnées d'un point connu pour trouver c . Et tu vérifies toujours avec un second point !

5. Droites parallèles, droites perpendiculaires

Propriété

Soient $d : ax + by + c = 0$ et $d' : a'x + b'y + c' = 0$, de vecteurs normaux $\mathbf{n}(a ; b)$ et $\mathbf{n}'(a' ; b')$.

- d et d' sont **parallèles** (ou confondues) $\Leftrightarrow \mathbf{n}$ et $\mathbf{n}'$ colinéaires $\Leftrightarrow ab' - a'b = 0$.
- d et d' sont **perpendiculaires** $\Leftrightarrow \mathbf{n}$ et $\mathbf{n}'$ orthogonaux $\Leftrightarrow aa' + bb' = 0$.



Exemple

$d : 2x + y - 3 = 0$ et $d' : x - 2y - 4 = 0$. On a $2 \times 1 + 1 \times (-2) = 0$: elles sont perpendiculaires. Pour $d'' : 2x + y + 2 = 0$, on a $2 \times 1 - 2 \times 1 = 0$: d'' est parallèle à d (et distincte, car les constantes diffèrent sans que l'équation soit proportionnelle).

Méthode : droite parallèle ou perpendiculaire passant par un point

- *Parallèle* à $d : ax + by + c = 0$ passant par P : on garde le même $(a ; b)$ et on cherche la nouvelle constante c' avec les coordonnées de P .
- *Perpendiculaire* à d passant par P : le vecteur normal $\mathbf{n}$ de d est un vecteur directeur de la perpendiculaire ; un vecteur normal de celle-ci est donc $(-b ; a)$ (ou $(b ; -a)$). On cherche ensuite la constante avec P .

Exemple

$d : 2x + y - 3 = 0$ et $P(1 ; 4)$. Parallèle : $2x + y + c = 0$ avec $2 + 4 + c = 0$, donc $2x + y - 6 = 0$. Perpendiculaire : on prend $(-1 ; 2)$, soit $x - 2y + c = 0$ avec $1 - 8 + c = 0$, donc $x - 2y + 7 = 0$.

Intersection de deux droites sécantes. Les coordonnées du point d'intersection vérifient les deux équations à la fois : on résout le système par substitution ou combinaison. Sur la figure ci-dessus, $2x + y = 3$ et $x - 2y = 4$ donnent $x = 2$ et $y = -1$: c'est le point I.

Deux droites remarquables du triangle

La **hauteur** issue de A est la perpendiculaire à (BC) passant par A : le vecteur **BC** en est un vecteur normal. La **médiatrice** de [AB] est la perpendiculaire à (AB) passant par le milieu de [AB] : le vecteur **AB** en est un vecteur normal.

6. Équation d'un cercle

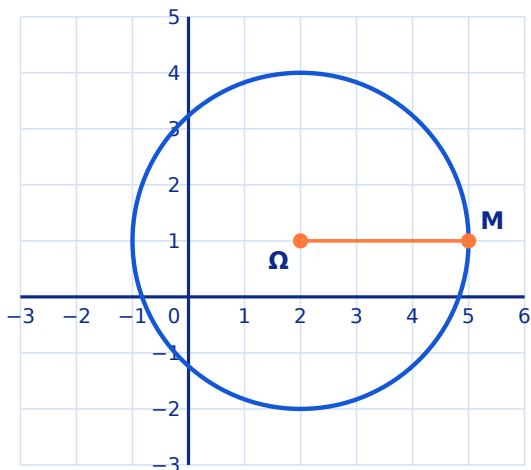
Cercle

Le cercle de centre Ω et de rayon $r > 0$ est l'ensemble des points M tels que $\Omega M = r$.

Équation d'un cercle

Le cercle de centre $\Omega(a ; b)$ et de rayon r a pour équation $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Réciproquement, une équation de cette forme avec $r > 0$ est celle du cercle de centre $\Omega(a ; b)$ et de rayon r .

Démonstration. $\Omega M = r \Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2$ (deux nombres positifs sont égaux si et seulement si leurs carrés le sont) $\Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, d'après la formule de la distance. ■



Exemple

Le cercle de centre $\Omega(2 ; 1)$ et de rayon 3 a pour équation $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$. Le point $M(5 ; 1)$, dessiné sur la figure, est sur le cercle : $(5 - 2)^2 + (1 - 1)^2 = 9$ ✓ ; le point $N(3 ; 2)$ n'y est pas : $1 + 1 = 2 \neq 9$. Le cercle de centre O et de rayon r a l'équation la plus simple : $x^2 + y^2 = r^2$.

Pièges à éviter

Dans $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, le second membre est r^2 , pas r . Et les signes sont « inversés » : $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 16$ est le cercle de centre $(-3 ; 5)$ et de rayon 4.

7. Reconnaître un cercle ; cercle de diamètre [AB]

Un cercle est souvent donné sous forme développée, du type $x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$. Pour savoir ce que c'est, on revient à la **forme canonique** avec les identités remarquables.

Méthode : reconnaître l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 + px + qy + s = 0$

1. On regroupe : $(x^2 + px) + (y^2 + qy) + s = 0$.
2. On complète les carrés : $x^2 + px = (x + p/2)^2 - p^2/4$ (même chose pour y).
3. On isole : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$.
4. On conclut : si $k > 0$, cercle de centre $(a ; b)$ et de rayon $\sqrt{k}$; si $k = 0$, le seul point $(a ; b)$; si $k < 0$, aucun point.

Exemple

$x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$. On écrit $(x - 3)^2 - 9 + (y + 4)^2 - 16 + 9 = 0$, soit $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 16$. C'est le cercle de centre $(3 ; -4)$ et de rayon 4.

Cercle de diamètre [AB]

Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points M tels que $\mathbf{MA} \cdot \mathbf{MB} = 0$. Si $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$, son équation est $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$.

En effet, un point M distinct de A et de B est sur le cercle de diamètre [AB] si et seulement si le triangle AMB est rectangle en M, c'est-à-dire si $\mathbf{MA}$ et $\mathbf{MB}$ sont orthogonaux ; les points A et B vérifient eux aussi l'égalité car l'un des deux vecteurs est nul. Autre méthode : le centre est le milieu de [AB] et le rayon est la moitié de AB.

8. Tangente à un cercle

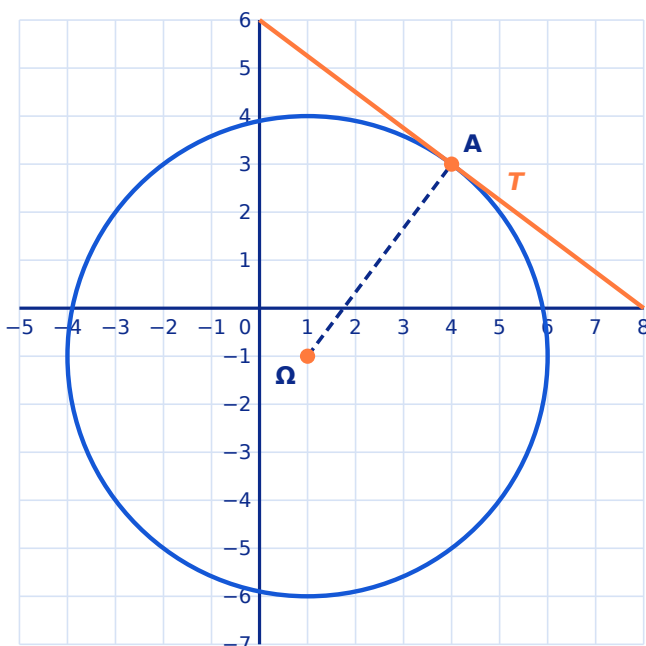
Tangente

Une droite est **tangente** à un cercle en un point A lorsqu'elle le touche en ce seul point A.

Propriété

La tangente en A au cercle de centre Ω est la droite passant par A **perpendiculaire au rayon** (ΩA). Le vecteur ΩA en est donc un vecteur normal, et son équation est $\Omega A \cdot \mathbf{AM} = 0$.

Justification. Soit t la perpendiculaire à (ΩA) passant par A et M un point de t distinct de A. Le triangle ΩAM est rectangle en A, donc $\Omega M^2 = \Omega A^2 + AM^2 > \Omega A^2 = r^2$: M est à l'extérieur du cercle. Ainsi t ne touche le cercle qu'en A.



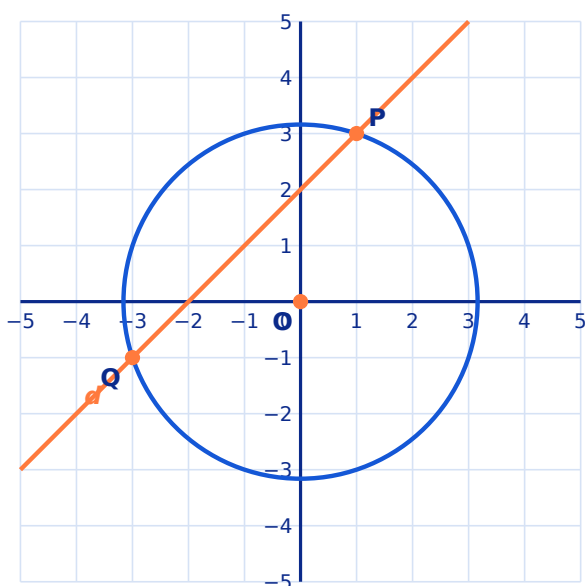
Exemple

Cercle de centre $\Omega(1 ; -1)$ et de rayon 5 ; le point $A(4 ; 3)$ lui appartient car $(4 - 1)^2 + (3 + 1)^2 = 9 + 16 = 25$. On a $\Omega A(3 ; 4)$. La tangente en A vérifie $3(x - 4) + 4(y - 3) = 0$, soit $3x + 4y - 24 = 0$.

9. Intersection d'une droite et d'un cercle

Méthode : par substitution

1. On exprime y en fonction de x (ou l'inverse) grâce à l'équation de la droite.
2. On remplace dans l'équation du cercle : on obtient une équation du second degré en x .
3. On calcule le discriminant Δ : si $\Delta > 0$, la droite coupe le cercle en **deux** points ; si $\Delta = 0$, elle est **tangente** (un seul point) ; si $\Delta < 0$, elle ne le rencontre **pas**.
4. On revient aux ordonnées avec l'équation de la droite.



Exemple

Cercle $x^2 + y^2 = 10$ et droite $d : y = x + 2$. On remplace : $x^2 + (x + 2)^2 = 10$, soit $2x^2 + 4x - 6 = 0$, ou $x^2 + 2x - 3 = 0$. $\Delta = 4 + 12 = 16 > 0$: deux solutions $x = 1$ et $x = -3$. Les points d'intersection sont $P(1 ; 3)$ et $Q(-3 ; -1)$.

Avec le même type de calcul, la droite $x + y = 4$ et le cercle $x^2 + y^2 = 8$ donnent $2x^2 - 8x + 8 = 0$, soit $2(x - 2)^2 = 0$: un seul point $(2 ; 2)$, la droite est tangente. Pour $x + y = 6$, on obtient $2x^2 - 12x + 28 = 0$ de discriminant $144 - 224 < 0$: aucune intersection.

Piège

Dans le calcul, n'oublie pas de développer entièrement $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$: l'erreur « $x^2 + 4$ » est la plus fréquente. Pense aussi à vérifier chaque point trouvé dans les deux équations.

À retenir

- Dans un repère orthonormé : $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = xx' + yy'$; orthogonaux $\Leftrightarrow$ produit scalaire nul ; colinéaires $\Leftrightarrow xy' - x'y = 0$.
- Droite d'équation $ax + by + c = 0$: vecteur normal $\mathbf{n}(a ; b)$, vecteur directeur $\mathbf{u}(-b ; a)$.
- Droite passant par A de vecteur normal $\mathbf{n}$: $\mathbf{AM} \cdot \mathbf{n} = 0$; avec deux points, on part de $\mathbf{AB}$ directeur.
- Parallèles $\Leftrightarrow ab' - a'b = 0$; perpendiculaires $\Leftrightarrow aa' + bb' = 0$.
- Hauteur issue de A : normal $\mathbf{BC}$; médiatrice de [AB] : normal $\mathbf{AB}$, passe par le milieu.
- Cercle de centre $\Omega(a ; b)$ et de rayon r : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$; cercle de diamètre [AB] : $\mathbf{MA} \cdot \mathbf{MB} = 0$.
- Forme développée : on complète les carrés ; second membre positif, nul ou négatif selon le cas.
- Tangente en A : perpendiculaire à (ΩA) , de vecteur normal $\mathbf{\Omega A}$.
- Droite et cercle : on substitue, on étudie le discriminant (2, 1 ou 0 point commun).