

# Équations, inéquations et systèmes

## Cours de maths - 3ème

Une équation, c'est une énigme : « quel nombre rend cette égalité vraie ? ». En 3ème, tu passes à la vitesse supérieure. Tu résous des équations du premier degré, des **équations produit**, des **inéquations** dont tu représentes les solutions sur une droite graduée, puis des **systèmes de deux équations à deux inconnues**. Tu t'en serviras enfin pour résoudre des problèmes concrets.

### Rappels utiles avant de commencer

- Une égalité reste vraie si on ajoute (ou retranche) le même nombre aux deux membres.
- Elle reste vraie si on multiplie (ou divise) les deux membres par le même nombre **non nul**.
- Un produit de facteurs est nul si l'un au moins des facteurs est nul.
- Pour développer :  $k(a + b) = ka + kb$ , avec attention aux signes.

## 1. Équations du premier degré (rappel)

**Équation, inconnue, solution** Une **équation** est une égalité qui contient une lettre, appelée **inconnue**. Une **solution** est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'égalité est vraie. **Résoudre** l'équation, c'est trouver toutes ses solutions.

**Tester un nombre** Le nombre 4 est-il solution de  $3x - 5 = 2x + 1$  ? À gauche :  $3 \times 4 - 5 = 7$ . À droite :  $2 \times 4 + 1 = 9$ . Comme  $7 \neq 9$ , **4 n'est pas solution**. Pour  $x = 6$  :  $3 \times 6 - 5 = 13$  et  $2 \times 6 + 1 = 13$ , donc **6 est solution**.

### Méthode pour résoudre $ax + b = cx + d$

1. Développer et réduire chaque membre si besoin.
2. Regrouper les termes en x d'un côté et les nombres de l'autre.
3. Diviser par le coefficient de x.
4. Vérifier en remplaçant x dans l'équation de départ.

### Exemple résolu

$$5x - 7 = 2x + 11$$

$$5x - 2x = 11 + 7 \text{ (on regroupe)}$$

$$3x = 18$$

$$x = \mathbf{18/3} = 6.$$

Vérification :  $5 \times 6 - 7 = 23$  et  $2 \times 6 + 11 = 23$ . La solution est **6**.

### Avec des fractions

$x + 3/4 = x - 1/2$  : on multiplie les deux membres par 4 (le dénominateur commun).

$$x + 3 = 2(x - 1), \text{ donc } x + 3 = 2x - 2, \text{ donc } 5 = x.$$

Contrôle :  $8/4 = 2$  et  $4/2 = 2$ . La solution est **5**.

**Piège** Quand tu changes un terme de côté, son signe change. Et n'oublie pas de multiplier **tous** les termes par le dénominateur commun, y compris ceux qui n'ont pas de fraction.

## 2. Les équations produit

**Propriété du produit nul** Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, **l'un au moins de ses facteurs est nul** :  $A \times B = 0$  équivaut à  $A = 0$  ou  $B = 0$ .

### Résoudre une équation produit

1. Vérifier que le second membre est **0** (sinon, on se ramène à 0 en passant tout d'un côté).
2. Écrire que chaque facteur est nul.
3. Résoudre chaque équation du premier degré obtenue.
4. Conclure : « L'équation a pour solutions ... et ... ».

### Exemple

$$(2x - 1)(x + 6) = 0$$

$$2x - 1 = 0 \text{ ou } x + 6 = 0$$

$$x = \mathbf{1/2} \text{ ou } x = -6.$$

Les solutions sont **1/2** et **-6**.

### Se ramener à une équation produit

$$(x + 3)(2x - 1) = (x + 3)(x + 5)$$

$$(x + 3)(2x - 1) - (x + 3)(x + 5) = 0 \text{ (on passe tout à gauche)}$$

$(x + 3)[(2x - 1) - (x + 5)] = 0$  (on factorise par  $x + 3$ )

$(x + 3)(x - 6) = 0$ , donc  $x = -3$  ou  $x = 6$ .

**Piège** Ne divise jamais les deux membres par un facteur qui contient  $x$  : tu perdrais une solution (ici  $-3$ ). Et si le second membre n'est pas 0, la propriété ne s'applique pas :  $(x - 2)(x + 1) = 4$  ne donne **pas**  $x = 6$  ou  $x = 3$ .

**Nombre de solutions** Une équation produit a au plus autant de solutions que de facteurs. Elle peut en avoir une seule :  $(x + 4)(x + 4) = 0$  a pour unique solution  $-4$ .

### 3. Les inéquations du premier degré

**Inéquation** Une **inéquation** est une inégalité qui contient une inconnue, avec l'un des symboles  $<$  (strictement inférieur),  $>$  (strictement supérieur),  $\leq$  (inférieur ou égal),  $\geq$  (supérieur ou égal). Une solution est un nombre qui rend l'inégalité vraie. En général, il y a une **infinité** de solutions.

#### Règles sur les inégalités

- On peut ajouter ou retrancher le même nombre aux deux membres : le sens ne change pas.
- On peut multiplier ou diviser par un **nombre positif** : le sens ne change pas.
- Si on multiplie ou divise par un **nombre négatif**, le sens de l'inégalité est **inversé**.

**Pourquoi le sens s'inverse** On sait que  $2 < 5$ . En multipliant par  $-3$  :  $2 \times (-3) = -6$  et  $5 \times (-3) = -15$ . Or  $-6 > -15$ . Le sens a bien changé.

#### Deux exemples résolus

$$3x - 5 \leq 7 \rightarrow 3x \leq 12 \rightarrow x \leq 4.$$

$$-2x + 3 > 11 \rightarrow -2x > 8 \rightarrow x < -4 \text{ (on divise par } -2 \text{ : le sens change).}$$

**Astuce** Pour éviter de diviser par un nombre négatif, tu peux isoler le terme en  $x$  du côté positif :  $-2x + 3 > 11$  devient  $3 - 11 > 2x$ , soit  $-8 > 2x$ , donc  $x < -4$ . Même résultat, sans changer le sens.

### 4. Représenter les solutions sur une droite graduée

#### Comment dessiner

- On repère le nombre-borne sur la droite.
- On colorie la partie de la droite qui contient les solutions.
- On place un **crochet** à la borne : tourné **vers les solutions** si la borne est solution ( $\leq$  ou  $\geq$ ), tourné **vers l'extérieur** si elle ne l'est pas ( $<$  ou  $>$ ).



Solutions de  $x \leq 4$  : le 4 est inclus, le crochet est tourné vers la gauche (vers les solutions).



Solutions de  $x < -4$  : le  $-4$  est exclu, le crochet est tourné vers la droite (hors des solutions).

**Lire une représentation** Si la partie coloriée part de 1 vers la droite avec un crochet fermé en 1, l'ensemble des solutions est  $x \geq 1$ . Pour une double condition comme  $-2 < x \leq 3$ , on colorie entre  $-2$  (exclu) et  $3$  (inclus). Les entiers solutions sont  $-1, 0, 1, 2$  et  $3$ .

## 5. Systèmes de deux équations à deux inconnues

**Système et solution** Un **système** de deux équations à deux inconnues  $x$  et  $y$  est formé de deux équations dont on cherche les solutions communes. Une **solution** est un **couple**  $(x ; y)$  qui vérifie les deux équations en même temps.

**Vérifier un couple** Le couple  $(4 ; 3)$  est-il solution de  $x + y = 7$  et  $2x - y = 5$  ?  $4 + 3 = 7$  et  $2 \times 4 - 3 = 5$ . Les deux égalités sont vraies : **oui**. Le couple  $(5 ; 2)$  vérifie la première ( $5 + 2 = 7$ ) mais pas la seconde ( $10 - 2 = 8 \neq 5$ ) : **non**.

**Les deux à la fois** Un couple qui ne vérifie qu'une seule équation n'est pas solution du système. L'ordre compte :  $(4 ; 3)$  n'est pas la même chose que  $(3 ; 4)$ .

## 6. Résoudre par substitution

### Méthode

1. Dans une équation, exprimer une inconnue en fonction de l'autre (par exemple  $y = 12 - x$ ).
2. Remplacer cette inconnue dans l'autre équation : on obtient une équation à une seule inconnue.

3. La résoudre.

4. Calculer l'autre inconnue, puis vérifier dans les deux équations.

### Exemple résolu

Système :  $x + y = 12$  et  $3x + 2y = 29$ .

De la première :  $y = 12 - x$ .

Dans la seconde :  $3x + 2(12 - x) = 29$ , donc  $3x + 24 - 2x = 29$ , donc  $x = 5$ .

Alors  $y = 12 - 5 = 7$ .

Vérification :  $5 + 7 = 12$  et  $3 \times 5 + 2 \times 7 = 29$ . La solution est le couple **(5 ; 7)**.

**Quand choisir la substitution ?** Quand une inconnue a pour coefficient 1 (ou  $-1$ ) dans une équation : l'isoler est alors facile et sans fractions.

## 7. Résoudre par combinaison

### Méthode

1. Multiplier une équation (ou les deux) pour que les coefficients d'une inconnue soient **opposés** (ou égaux).
2. Additionner (ou soustraire) membre à membre les deux équations : cette inconnue disparaît.
3. Résoudre l'équation obtenue.
4. Remplacer dans une équation pour trouver l'autre inconnue, puis vérifier.

### Exemple résolu

Système :  $3x + 2y = 16$  et  $5x - 3y = 14$ .

On veut faire disparaître  $y$  : on multiplie la première par 3 et la seconde par 2.

$9x + 6y = 48$  et  $10x - 6y = 28$ .

On additionne :  $19x = 76$ , donc  $x = 4$ .

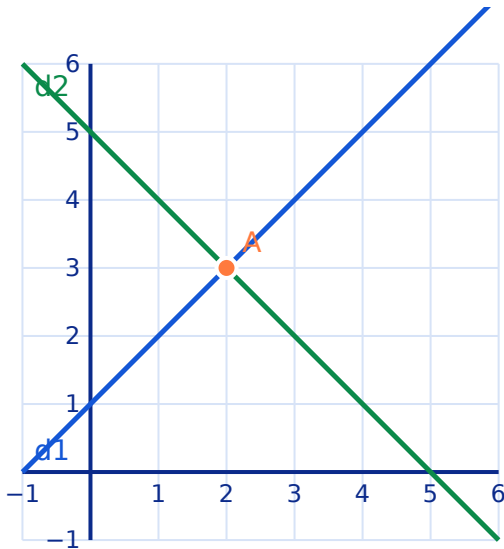
Dans la première :  $3 \times 4 + 2y = 16$ , donc  $2y = 4$ , donc  $y = 2$ .

Vérification :  $5 \times 4 - 3 \times 2 = 14$ . La solution est **(4 ; 2)**.

**Piège** Quand tu multiplies une équation, multiplie bien **les deux membres**. Et en soustrayant, attention aux signes : soustraire  $-6y$  revient à ajouter  $6y$ .

## 8. Interprétation graphique d'un système

Une équation comme  $y = x + 1$  est celle d'une droite : chaque couple solution est un point de cette droite. Résoudre un système, c'est donc chercher les points **communs aux deux droites**.



Le système  $y = x + 1$  et  $y = -x + 5$  : les droites d1 et d2 se coupent en A(2 ; 3). Le couple (2 ; 3) est l'unique solution.

### Trois cas possibles

- Les droites sont **sécantes** : une seule solution (le point d'intersection).
- Les droites sont **parallèles distinctes** : aucune solution.
- Les droites sont **confondues** : une infinité de solutions.

### Système sans solution

$2x + y = 3$  et  $4x + 2y = 7$ . En doublant la première :  $4x + 2y = 6$ . Or  $6 \neq 7$  : c'est impossible. Les droites sont parallèles, **pas de solution**.

## 9. Mettre un problème en équation ou en système

### Les cinq étapes

1. **Choisir l'inconnue** (ou les deux) et la définir par une phrase : « Soit x le prix d'un cahier, en euros ».
2. **Traduire** l'énoncé par une équation, une inéquation ou un système.
3. **Résoudre**.
4. **Vérifier** que la solution a du sens (un nombre de personnes est entier et positif) et qu'elle convient à l'énoncé.
5. **Conclure** par une phrase réponse avec l'unité.

**Avec une équation** Un jardinier clôture un rectangle dont la longueur dépasse la largeur de 3 m, avec 46 m de grillage. Soit  $x$  la largeur (en m). Le périmètre vaut  $2(x + x + 3) = 46$ , donc  $4x + 6 = 46$ , donc  $x = 10$ . Le rectangle mesure **10 m sur 13 m**.

**Avec un système** On a 25 pièces de 1 € et de 2 €, pour 38 € au total. Soit  $x$  le nombre de pièces de 1 € et  $y$  celui de 2 €. Alors  $x + y = 25$  et  $x + 2y = 38$ . En soustrayant :  $y = 13$ , puis  $x = 12$ . Il y a **12 pièces de 1 €** et **13 pièces de 2 €** ( $12 + 26 = 38$ ).

**Le conseil de Mathbot** Bip ! Écris toujours ce que représente chaque lettre avant de poser une équation. Sans cette phrase, même un robot se perd dans ses inconnues.

## À retenir

- Une équation se résout en gardant l'égalité : on fait la même opération sur les deux membres.
- $A \times B = 0$  équivaut à  $A = 0$  ou  $B = 0$  (le second membre doit être 0).
- Pour une inéquation, on inverse le sens quand on multiplie ou divise par un nombre **négatif**.
- Sur la droite graduée, le crochet est tourné vers les solutions si la borne est incluse ( $\leq, \geq$ ), vers l'extérieur sinon ( $<, >$ ).
- Une solution d'un système est un couple qui vérifie **les deux** équations.
- Substitution : on isole une inconnue, on la remplace dans l'autre équation.
- Combinaison : on fabrique des coefficients opposés, on additionne pour éliminer une inconnue.
- Graphiquement, un système a 0, 1 ou une infinité de solutions selon la position des deux droites.
- Pour un problème : inconnue définie, mise en équation, résolution, vérification, phrase réponse.