

Espace

Cours de maths - 4ème

Dans ce chapitre, tu apprends à reconnaître les **solides usuels** (prismes droits, cylindres de révolution, pyramides), à les **dessiner** en perspective et à fabriquer leur **patron**. Tu découvres aussi comment **couper** un solide avec un plan et comment calculer son **aire latérale** et son **volume**. Chaque partie finit par une méthode à retenir.

1. Rappels utiles

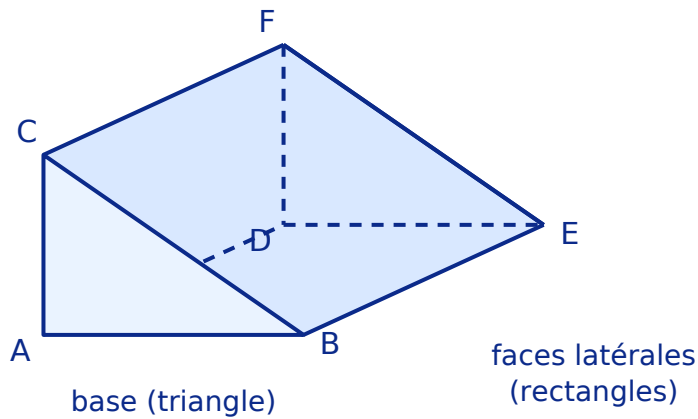
Aires et périmètres déjà connus Aire d'un rectangle : longueur $\times$ largeur. Aire d'un triangle : base $\times$ hauteur $\div 2$. Aire d'un trapèze : (grande base + petite base) $\times$ hauteur $\div 2$. Aire d'un disque de rayon r : $\pi \times r^2$; périmètre (longueur) d'un cercle : $2 \times \pi \times r$. Pour π , la calculatrice donne 3,141 59... et on prend souvent 3,14 pour un calcul à la main.

Unités de volume $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L} = 1\,000 \text{ cm}^3$ et $1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ dm}^3 = 1\,000 \text{ L}$. Un litre est donc le volume d'un cube de 10 cm d'arête. Un centilitre vaut 10 cm^3 et un millilitre 1 cm^3 .

Rappel de vocabulaire Un **polygone** est une figure plane fermée à côtés droits. Dans un solide, une **face** est une surface plane, une **arête** est le segment où deux faces se rencontrent, un **sommet** est un coin où plusieurs arêtes se rejoignent.

2. Le prisme droit

Prisme droit Un prisme droit est un solide formé de **deux bases** qui sont des polygones superposables et situés dans deux plans parallèles, reliées par des **faces latérales rectangulaires**. Les arêtes latérales sont toutes de même longueur ; cette longueur est la **hauteur** du prisme. Elles sont perpendiculaires aux bases.



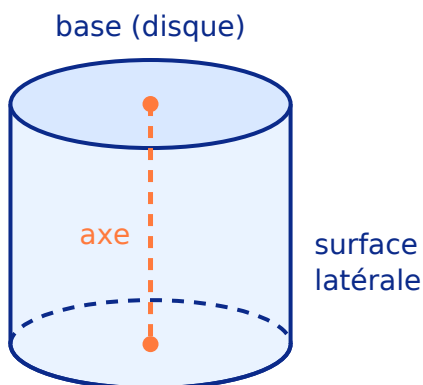
Ce prisme droit a pour bases les triangles ABC et DEF, et trois faces latérales rectangulaires. Les arêtes cachées sont en pointillés.

Compter les faces, arêtes et sommets Si la base a n côtés, le prisme droit a $n + 2$ **faces** (les 2 bases et n faces latérales), $3 \times n$ **arêtes** et $2 \times n$ **sommets**. Exemple : une base hexagonale ($n = 6$) donne 8 faces, 18 arêtes et 12 sommets.

Des prismes que tu connais Le **pavé droit** (boîte à chaussures) est un prisme droit dont la base est un rectangle. Le **cube** est un prisme droit dont la base est un carré et dont la hauteur est égale au côté de ce carré. Une tablette de chocolat triangulaire ou un toit à deux pentes ont la forme d'un prisme droit à base triangulaire.

3. Le cylindre de révolution

Cylindre de révolution Un cylindre de révolution est le solide obtenu en faisant **tourner un rectangle** autour de l'un de ses côtés (l'**axe**). Il a **deux bases** qui sont des disques superposables, de même rayon r , et une **surface latérale** courbe. La distance entre les deux bases est la **hauteur** h ; l'axe passe par les centres des deux disques.

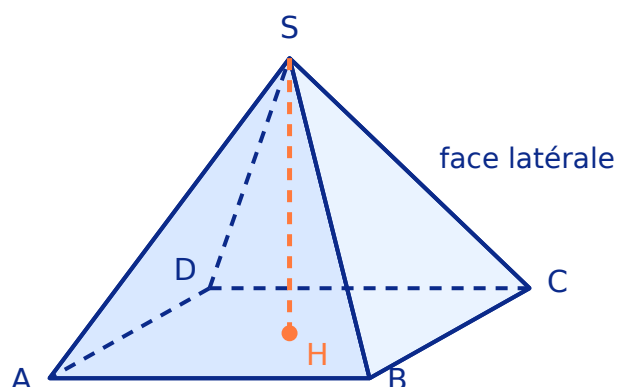


Les deux disques sont parallèles ; l'axe (en orange) leur est perpendiculaire et sa longueur est la hauteur du cylindre.

Dans la vie Une boîte de conserve, un tuyau, une bougie ronde, un verre droit, un rouleau de papier sont des cylindres de révolution (ou presque).

4. La pyramide

Pyramide Une pyramide est un solide qui a **une base** polygonale et un **sommet** principal. Chaque côté de la base est relié au sommet par une **face latérale triangulaire**. La **hauteur** est le segment issu du sommet et perpendiculaire à la base ; elle la touche en un point H. Une pyramide **régulière** a pour base un polygone régulier (par exemple un carré) et ses faces latérales sont des triangles isocèles superposables.



Pyramide SABCD : S est le sommet, ABCD est la base, [SH] (en orange) est la hauteur.

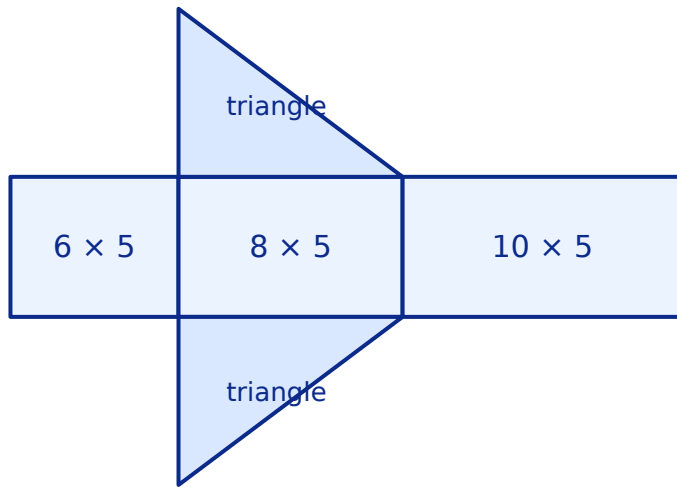
Compter les faces, arêtes et sommets Si la base a n côtés, la pyramide a $n + 1$ **faces** (la base et n triangles), $2 \times n$ **arêtes** et $n + 1$ **sommets**. La pyramide à base triangulaire s'appelle un **tétraèdre** (4 faces) ; si toutes ses faces sont des triangles équilatéraux, il est dit **régulier**.

Ne confonds pas La **hauteur de la pyramide** (perpendiculaire à la base, elle passe à l'intérieur ou à côté de la pyramide) n'est pas la hauteur d'une *face* triangulaire, qui est mesurée sur la face elle-même.

5. Les patrons

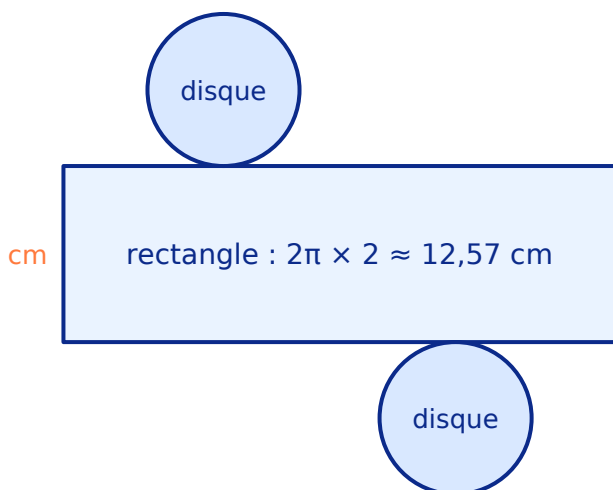
Patron Un patron est une figure plane, en vraie grandeur, que l'on peut découper puis plier pour fabriquer le solide. Les faces sont dessinées sans se chevaucher ; chaque arête du solide correspond à deux côtés de même longueur sur le patron.

Patron d'un prisme droit 1) Les faces latérales forment des rectangles de même hauteur h (celle du prisme) ; leurs largeurs sont les côtés de la base. On les dessine côte à côte. 2) On accroche une base au-dessus et l'autre au-dessous d'un rectangle. Exemple : base triangle rectangle de côtés 6 cm, 8 cm et 10 cm, hauteur 5 cm.

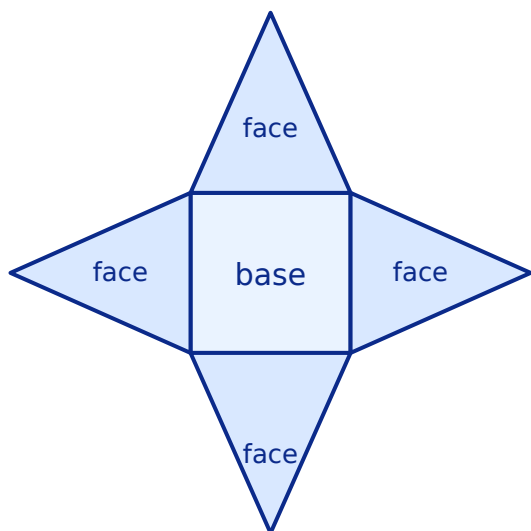


Trois rectangles (6×5 , 8×5 et 10×5 , en cm) et deux triangles : 5 faces pour un prisme à base triangulaire.

Patron d'un cylindre de révolution La surface latérale déroulée est un **rectangle** dont une dimension est la hauteur h et l'autre est le **périmètre de la base** : $2 \times \pi \times r$. On ajoute les deux disques, tangents au rectangle. Exemple : $r = 2$ cm et $h = 4$ cm, donc longueur $2 \times \pi \times 2 \approx 12,57$ cm.



Patron d'une pyramide On dessine la base en vraie grandeur, puis on accroche à chacun de ses côtés la face triangulaire correspondante. Pour une pyramide régulière à base carrée, on obtient un carré entouré de 4 triangles isocèles superposables. Pour construire un triangle dont on connaît les trois côtés, on utilise la règle et le compas.



Mathbot te conseille Avant de découper un patron, vérifie que les côtés qui doivent se coller ont la même longueur. Et n'oublie pas les languettes !

6. Représenter un solide

Perspective cavalière C'est une manière de dessiner un solide sur une feuille. Les faces situées **dans le plan de face** (celui de la feuille) sont dessinées **en vraie grandeur**. Les arêtes qui partent « vers l'arrière » sont dessinées **parallèles entre elles**, avec un même angle (souvent 30° à 45°) et une longueur **réduite** (par exemple moitié ou deux tiers de la longueur réelle).

Dessiner un prisme droit en perspective cavalière 1) Trace en vraie grandeur la face avant (la base, ou un rectangle). 2) Trace les arêtes fuyantes parallèles, de même longueur dessinée. 3) Joins les extrémités pour obtenir la face arrière, identique à la face avant. 4) Repasse en **pointillés** les arêtes cachées.

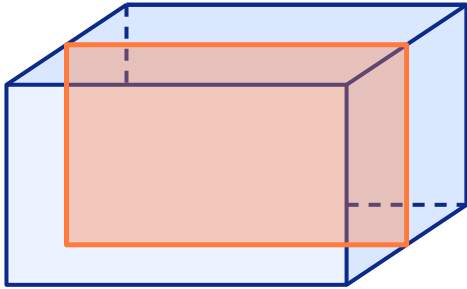
Ce qui se conserve, ce qui change Des segments parallèles restent parallèles, le milieu d'un segment reste le milieu. En revanche, les angles et les longueurs des arêtes fuyantes ne sont pas conservés (un angle droit peut sembler aigu).

Les vues Pour décrire un solide, on dessine souvent des vues en vraie grandeur : la **vue de face**, la **vue de dessus**, la **vue de côté**. Pour un prisme droit posé sur une base, la vue de dessus montre la base, et la vue de face un rectangle.

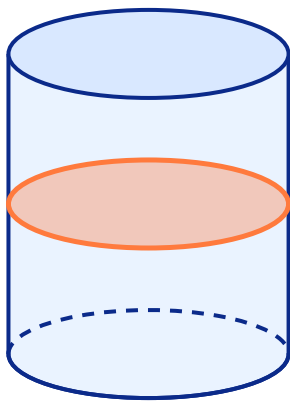
7. Sections par un plan

Section La section d'un solide par un plan est la figure plane que l'on obtient quand on coupe le solide par ce plan.

Sections à connaître • Pavé droit coupé par un plan **parallèle à une face** : un rectangle identique à cette face. • Pavé droit coupé par un plan parallèle à une arête : un rectangle. • Cylindre coupé par un plan **parallèle aux bases** : un disque de même rayon ; coupé par un plan **contenant l'axe** (ou parallèle à l'axe) : un rectangle. • Pyramide coupée par un plan **parallèle à la base** : un polygone de même forme que la base, mais plus petit.



section : un rectangle



section : un disque

Exemple On coupe un cylindre de rayon 3 cm et de hauteur 10 cm par un plan contenant l'axe : la section est un rectangle de 6 cm (le diamètre) sur 10 cm (la hauteur).

8. Aires latérales et volumes

Aire latérale Le patron montre que l'aire latérale (sans les bases) est celle d'un rectangle. • Prisme droit : **aire latérale = périmètre de la base $\times$ hauteur**. • Cylindre de révolution : **aire latérale = $2 \times \pi \times r \times h$** . L'aire totale s'obtient en ajoutant l'aire des deux bases (pour le prisme et le cylindre).

Volumes Notons B l'aire de la base et h la hauteur du solide. • Prisme droit ou cylindre : **$V = B \times h$** . Pour le cylindre, $B = \pi \times r^2$, donc **$V = \pi \times r^2 \times h$** . • Pyramide : **$V = \frac{1}{3} \times B \times h$** .

D'où vient le tiers ? On peut découper un cube en trois pyramides identiques qui ont pour base une face du cube et pour sommet un même coin. Chacune a le même volume : un tiers de celui du cube. Une pyramide a donc le tiers du volume du prisme de même base et de même hauteur.

Calculer un volume 1) Repère la base et calcule son aire B (formule du polygone ou du disque). 2) Repère la hauteur h du solide, perpendiculaire à la base, avec la même unité que les côtés de la base. 3) Applique la formule. 4) Écris l'unité au cube (cm^3 , m^3) et convertis si besoin.

Exemple résolu Prisme droit de hauteur 9 cm dont la base est un triangle de base 5 cm et de hauteur 4 cm : $B = 5 \times 4 \div 2 = 10 \text{ cm}^2$, donc $V = 10 \times 9 = \mathbf{90 \text{ cm}^3}$. Cylindre de rayon 3 cm et de hauteur 7 cm : $V = \pi \times 3^2 \times 7 = 63\pi \approx \mathbf{197,92 \text{ cm}^3}$. Pyramide de base carrée de côté 6 cm et de hauteur 5 cm : $V = \mathbf{1/3} \times 36 \times 5 = \mathbf{60 \text{ cm}^3}$.

Piège classique Dans un prisme dont la base est un trapèze ou un triangle, ne mélange pas la **hauteur de la base** (utilisée pour B) et la **hauteur du prisme** (celle des arêtes latérales).

À retenir

- Prisme droit : deux bases polygonales superposables et parallèles, faces latérales rectangulaires ; base à n côtés : $n + 2$ faces, $3n$ arêtes, $2n$ sommets.
- Cylindre de révolution : deux disques parallèles et une surface latérale qui se déroule en rectangle de longueur $2\pi r$.
- Pyramide : une base, un sommet, des faces latérales triangulaires ; base à n côtés : $n + 1$ faces, $2n$ arêtes, $n + 1$ sommets.
- Un patron est une figure plane en vraie grandeur qui se plie pour former le solide.
- En perspective cavalière, les faces de face sont en vraie grandeur, les arêtes fuyantes sont parallèles et raccourcies, les arêtes cachées sont en pointillés.
- Volumes : prisme et cylindre $V = B \times h$; pyramide $V = \mathbf{1/3} \times B \times h$. Aire latérale : périmètre de la base $\times$ hauteur (prisme) ; $2\pi rh$ (cylindre).
- $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L} = 1\,000 \text{ cm}^3$; $1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ L}$.