

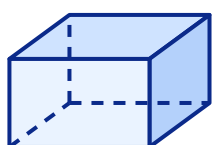
Espaces : visualiser et construire

Cours de maths - 6ème

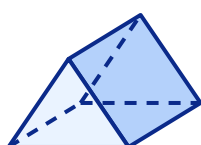
Dans ce chapitre, tu apprends à **reconnaître et décrire les solides** de l'espace (pavé, cube, prisme, pyramide, cylindre, cône, boule), à les **dessiner en perspective cavalière**, à fabriquer leurs **patrons** et à **compter des cubes** dans un assemblage en imaginant ses vues. Ouvre l'œil : les solides sont partout autour de toi, des boîtes de jeux aux toits des maisons.

1. Les solides usuels

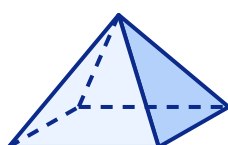
Un **solide** est un objet de l'espace qui occupe de la place : on peut le tenir dans la main ou le poser sur une table. Voici ceux que tu dois savoir nommer dès l'instant où tu les vois.



pavé droit



prisme droit



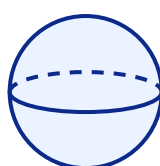
pyramide



cylindre



cône



boule (sphère)

Les traits pleins montrent les arêtes visibles, les pointillés les arêtes cachées derrière le solide.

Polyèdre Un polyèdre est un solide dont **toutes les faces sont des polygones** (triangles, carrés, rectangles, pentagones...). Le pavé droit, le cube, le prisme droit et la pyramide sont des polyèdres.

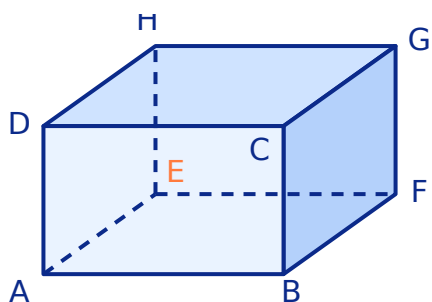
Attention Le cylindre, le cône et la boule ne sont **pas des polyèdres** : ils ont une surface courbe ou des faces en forme de disque, et un disque n'est pas un polygone.

Objet de la vie courante	Solide associé
une boîte de céréales	pavé droit
un dé à jouer	cube
une canette de soda	cylindre
un chapeau de fête	cône

Objet de la vie courante	Solide associé
un ballon de basket	boule
le toit d'une tente canadienne	prisme droit
une pyramide d'Égypte	pyramide

2. Faces, arêtes et sommets

Vocabulaire d'un polyèdre Une **face** est un polygone qui forme une « paroi » du solide. Une **arête** est un segment où deux faces se rejoignent. Un **sommet** est un point où plusieurs arêtes se rejoignent (un coin).



Sur ce pavé : [AB] est une arête, A est un sommet, et ABCD est une face (le rectangle de devant).

Compter dans un pavé droit Un pavé droit a **6 faces** (devant, derrière, dessus, dessous, gauche, droite), **12 arêtes** (4 en haut, 4 en bas, 4 qui montent) et **8 sommets**.

Compter sans se tromper 1) Compte les faces en les nommant une à une, y compris celles qu'on ne voit pas. 2) Pour les arêtes, compte celles de la base, celles du dessus, puis celles qui relient les deux. 3) Compte les sommets en marquant chacun d'un point. Les pointillés sont des arêtes comme les autres !

Solide	Faces	Sommets	Arêtes
cube ou pavé droit	6	8	12
prisme droit à base triangulaire	5	6	9
pyramide à base carrée	5	5	8
pyramide à base triangulaire	4	4	6

Un contrôle astucieux Pour un polyèdre (sans creux), le nombre de faces plus le nombre de sommets dépasse toujours de 2 le nombre d'arêtes : $6 + 8 = 12 + 2$ pour le pavé. Utilise cette égalité pour vérifier ton comptage.

3. Le pavé droit et le cube

Pavé droit et cube Un **pavé droit** (ou parallélépipède rectangle) est un polyèdre dont les six faces sont des **rectangles**. Un **cube** est un pavé droit particulier dont les six faces sont des **carrés** identiques.

Propriétés du pavé droit • Les faces opposées sont **parallèles** et **superposables** (même taille).

- Deux faces qui se touchent sont **perpendiculaires** : chaque face est perpendiculaire à 4 autres.
- Les 12 arêtes se répartissent en 3 groupes de 4 arêtes parallèles et de même longueur : la **longueur**, la **largeur** et la **hauteur**.
- Dans un cube, les 12 arêtes ont toutes la même longueur.

Exemple Un pavé a pour dimensions 6 cm, 4 cm et 3 cm. Il a 4 arêtes de 6 cm, 4 arêtes de 4 cm et 4 arêtes de 3 cm. La somme des longueurs de ses arêtes est $4 \times (6 + 4 + 3) = 4 \times 13 = \mathbf{52 \text{ cm}}$. Un cube d'arête 5 cm a des arêtes qui mesurent en tout $12 \times 5 = \mathbf{60 \text{ cm}}$.

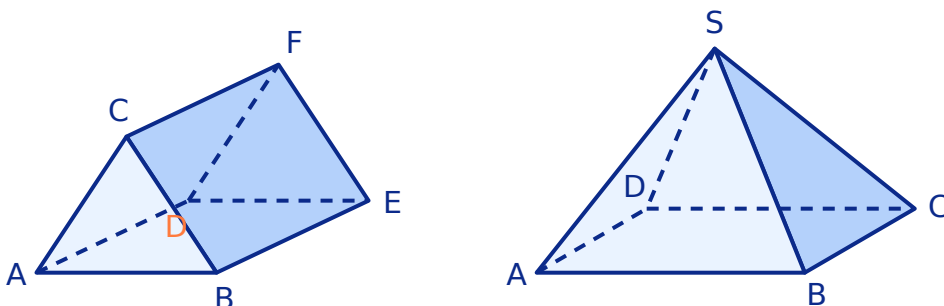
4. Prisme droit, pyramide, cylindre, cône et boule

Prisme droit Un prisme droit est un polyèdre qui a **deux bases** : des polygones identiques, parallèles. Ses **faces latérales** sont des rectangles. Le pavé droit est un prisme droit dont la base est un rectangle.

Pyramide Une pyramide a **une base** qui est un polygone. Ses **faces latérales** sont des triangles qui se rejoignent en un même point, le **sommet principal**.

Cylindre, cône, boule Un **cylindre de révolution** a deux bases qui sont des disques parallèles de même rayon ; sa surface latérale est courbe. Un **cône de révolution** a une base en forme de disque et un sommet. Une **sphère** est une surface dont tous les points sont à la même distance d'un point appelé centre ; la **boule** est le solide qu'elle entoure.

Voici un prisme droit et une pyramide dont on a nommé les sommets :



Prisme ABCDEF : les bases sont les triangles ABC et DEF (D est caché). Pyramide SABCD : la base est le carré ABCD et le sommet principal est S.

Reconnaître un solide à partir de ses faces Regarde d'abord s'il y a des faces courbes ou des disques (cylindre, cône, boule). Sinon, observe les bases : **deux bases identiques** et des rectangles sur les côtés, c'est un prisme ; **une seule base** et des triangles qui se rejoignent, c'est une pyramide. Le polygone de la base donne la fin du nom : un prisme à base pentagonale, une pyramide à base hexagonale...

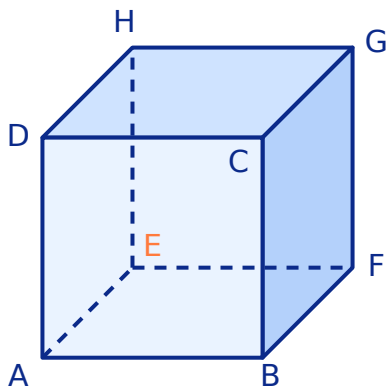
Exemple Une pyramide dont la base est un hexagone a 6 faces triangulaires et 1 base, soit **7 faces, 7 sommets** (6 sur la base et le sommet principal) et **12 arêtes** (6 sur la base et 6 qui montent). Contrôle : $7 + 7 = 12 + 2$.

5. Représenter un solide : la perspective cavalière

Pour dessiner un solide sur une feuille, on utilise la **perspective cavalière**. Elle donne l'impression de profondeur tout en restant simple à tracer.

Les règles de la perspective cavalière • Les faces **de face** (parallèles à la feuille) sont dessinées en **vraie grandeur** : un carré reste un carré.

- Les arêtes qui partent vers l'arrière (les **arêtes fuyantes**) sont dessinées **obliques**, souvent à 45° , et **raccourcies** (en général de moitié).
- Deux arêtes parallèles dans l'espace restent **parallèles** sur le dessin.
- Les arêtes **cachées** sont tracées en **pointillés**.



Cube ABCDEFGH en perspective cavalière : ABCD est la face de devant (un vrai carré), EFGH est la face arrière. Les arêtes [AE], [EF] et [EH] sont cachées.

Piège classique Sur le dessin, les faces du dessus et de droite ressemblent à des **parallélogrammes**, pas à des carrés. Pourtant ce sont de vrais carrés dans le cube : la perspective déforme les faces qui fuient. Les longueurs des arêtes fuyantes sont aussi raccourcies : une arête de 4 cm est tracée avec 2 cm.

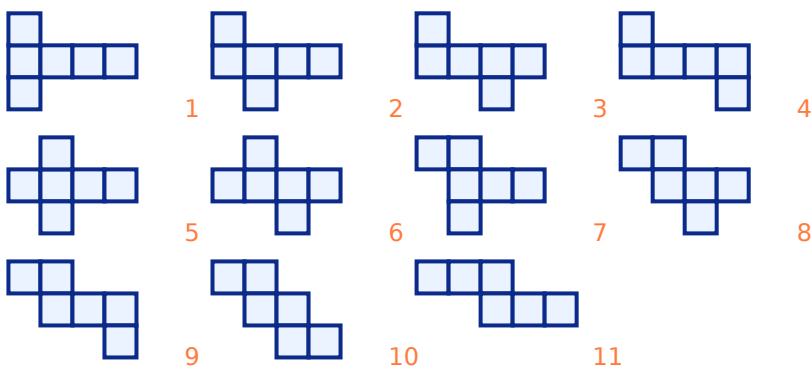
Dessiner un pavé en perspective cavalière 1) Trace la face de devant en vraie grandeur. 2) Depuis chaque sommet, trace une arête fuyante à 45° , toutes de même

longueur et parallèles. 3) Relie leurs extrémités pour obtenir la face de derrière. 4) Repasse en pointillés les trois arêtes cachées, en partant du sommet situé derrière en bas à gauche.

6. Les patrons

Patron Un patron d'un solide est une figure plane, d'un seul morceau, qui permet de **construire le solide en le pliant**, sans recouvrement et sans trou. Toutes les faces doivent être présentes, collées par un côté commun.

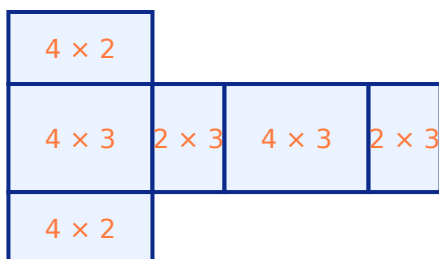
Il existe exactement **11 patrons différents pour le cube** (en comptant comme identiques ceux qui se superposent après retournement). Les voici :



Vérifier qu'un assemblage de six carrés est un patron de cube • Compte 6 carrés exactement. • Cherche la plus longue file de carrés alignés : jamais 5 ni plus, car en pliant, le premier et le dernier se recouvrent. • Une file de 4 carrés forme le tour du cube ; les deux carrés restants doivent être **un de chaque côté** de cette file (l'un fait le dessus, l'autre le dessous). • Pas de bloc de 4 carrés formant un grand carré. En cas de doute, plie le dessin dans ta tête... ou avec du papier.

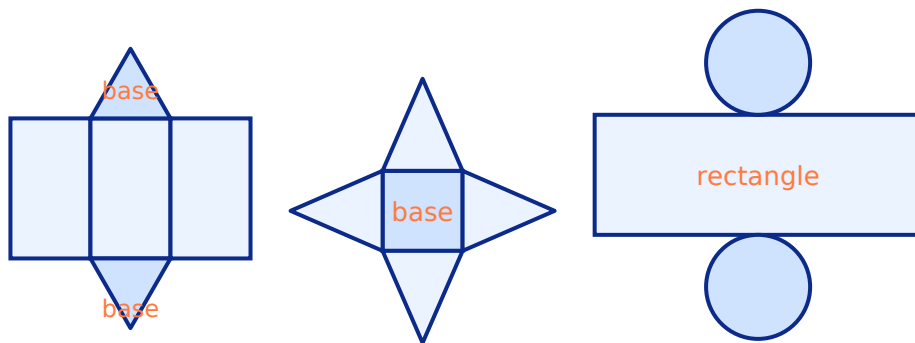
Pour les autres solides, voici des patrons :

Pavé droit : 6 rectangles, les faces opposées étant identiques.



Patron d'un pavé de 4 cm × 2 cm × 3 cm : une bande de quatre rectangles (le tour) et un rectangle de chaque côté (le dessus et le dessous).

Prisme droit à base triangulaire : 3 rectangles et 2 triangles. **Pyramide à base carrée** : 1 carré et 4 triangles. **Cylindre** : 2 disques et 1 rectangle.

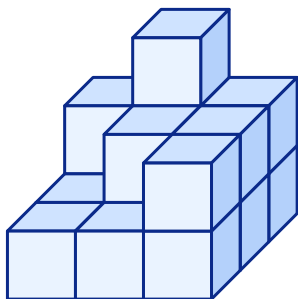


Un détail pour le cylindre La longueur du rectangle est égale au **périmètre** d'un disque de base : le rectangle s'enroule exactement autour du disque. Sa largeur est la hauteur du cylindre. Ces deux longueurs doivent donc s'accorder !

Mathbot Bip bip ! Pour trouver quelle face est en face d'une autre sur un patron de cube, regarde la file de 4 carrés : le 1er et le 3ème sont opposés, le 2ème et le 4ème aussi. Les deux carrés restants sont opposés entre eux.

7. Assemblages de cubes : compter et imaginer les vues

Un **assemblage de cubes** (ou empilement) est un solide formé de petits cubes identiques collés les uns aux autres. On doit savoir **les compter** et **dessiner ses vues** : ce qu'on voit en le regardant de face, de dessus, de gauche ou de droite.

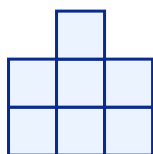


Cet assemblage est vu de face, un peu du dessus et de la droite.

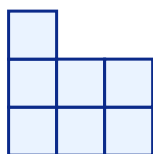
Compter les cubes On compte **colonne par colonne** ou **couche par couche**. Le plus sûr est d'écrire, sur un plan vu de dessus, le **nombre de cubes empilés** dans chaque case, puis d'additionner. Les cubes cachés derrière les autres comptent aussi : ils soutiennent ceux du dessus.

2	3	2
1	2	2
1	1	2

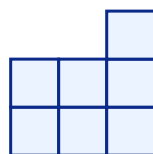
Vue de dessus



Vue de face



Vue de gauche



Vue de droite

Dans le plan de dessus, le bas du dessin représente l'avant de l'assemblage et chaque nombre donne la hauteur de la pile.

Lire le plan de dessus En additionnant tous les nombres du plan : $1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 2 + 3 + 2 = 16$ cubes. La **vue de face** garde, pour chaque colonne, la pile la plus haute parmi celles qui sont alignées devant et derrière : 2, 3 et 2. La **vue de gauche** et la **vue de droite** se lisent de la même façon, en regardant les rangées d'avant en arrière.

Les vues ne disent pas tout Une vue ne montre que les cubes les plus hauts ou les plus proches : plusieurs assemblages différents peuvent donner la même vue de face. C'est pourquoi on croise plusieurs vues avec le plan de dessus.

8. Résoudre un problème avec des solides

Les situations classiques • Longueur de ruban ou de baguettes le long des arêtes : additionne les longueurs de toutes les arêtes (4 fois la longueur, 4 fois la largeur, 4 fois la hauteur pour un pavé).

- **Papier d'emballage ou peinture** : on calcule l'aire de chaque face (rectangle), puis on additionne. Pour un pavé, les faces vont par paires identiques.
- **Rangement de cubes** dans une boîte : on cherche combien de cubes tiennent dans la longueur, la largeur, puis la hauteur, et on multiplie les trois nombres.
- **Faces peintes** : on classe les petits cubes selon leur position (coins, arêtes, faces, intérieur).

Exemple : un grand cube peint On peint les faces d'un grand cube de 3 cubes d'arête, puis on le découpe en 27 petits cubes. Les **8 coins** ont 3 faces peintes ; les **12 cubes des arêtes** (un par arête) ont 2 faces peintes ; les **6 cubes des faces** (un au centre de chaque face) ont 1 face peinte ; le cube du **centre** n'a aucune face peinte. Contrôle : $8 + 12 + 6 + 1 = 27$.

Exemple : ranger des cubes Dans une caisse de 30 cm × 20 cm × 10 cm, on range des cubes de 10 cm d'arête : 3 dans la longueur, 2 dans la largeur, 1 en hauteur. Il y en a $3 \times 2 \times 1 = 6$ cubes.

À retenir

- Un polyèdre est un solide dont toutes les faces sont des polygones : cube, pavé droit, prisme droit et pyramide en sont ; le cylindre, le cône et la boule n'en sont pas.
- Un pavé droit a 6 faces rectangulaires, 12 arêtes et 8 sommets ; ses faces opposées sont parallèles et superposables ; un cube a six faces carrées identiques.
- Un prisme droit a deux bases identiques et des faces latérales rectangulaires ; une pyramide a une base et des faces latérales triangulaires.
- En perspective cavalière, les faces de face sont en vraie grandeur, les arêtes fuyantes

sont obliques et raccourcies, le parallélisme est conservé, et les arêtes cachées sont en pointillés.

- Un patron est une figure plane qui se plie pour fabriquer le solide : le cube a 11 patrons, jamais avec 5 carrés alignés.
- Pour un assemblage de cubes, on note la hauteur de chaque pile sur un plan de dessus ; on en déduit le nombre de cubes et les vues de face, de gauche et de droite.