

Fonction exponentielle

Contrôle de maths - 1ère

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice interdite.

1 Calcul sur les exponentielles / 4 pts

- Simplifie : $A = e^{\square} \times e^{\square} / e^{\square}$ et $B = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$.
- Résous dans $\mathbb{R}$: $e^{x^2-2x} = e^3$.
- Résous dans $\mathbb{R}$: $e^{1-2x} < e^{x+4}$.

2 Étude d'une fonction produit / 5 pts

Soit $g(x) = (3 - x)e^{x/2}$ pour x réel.

- Montre que $g'(x) = 1 - x/2 e^{x/2}$.
- Dresse le tableau de variations de g . Donne son maximum (valeur exacte puis arrondie à 10^{-3}).
- Détermine l'équation de la tangente à la courbe de g en $x = 0$.
- Résous $g(x) = 0$ puis donne le signe de $g(x)$.

3 Une propriété qui caractérise l'exponentielle / 3 pts

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) = 2f(x)$ pour tout x , et $f(0) = 3$. On pose $\varphi(x) = f(x) e^{-2x}$.

- Calcule $\varphi'(x)$ et conclus que φ est constante. Quelle est sa valeur ?
- Exprime $f(x)$ puis calcule $f(0,5)$ à 10^{-3} près.

4 Concentration d'un médicament / 4 pts

Calculatrice autorisée. La concentration (en mg/L) d'un médicament dans le sang, t heures après l'injection, est $C(t) = 12e^{-0,2t}$.

- Calcule $C(0)$ et $C(3)$ (arrondi à 10^{-3}).
- Calcule $C'(t)$. Quel est le sens de variation de C ? Quelle est la vitesse de variation à $t = 0$?
- Le traitement doit être renouvelé lorsque la concentration passe sous 1,5 mg/L. Au

bout de combien d'heures entières ?

5 Capital à intérêts continus / 4 pts

Calculatrice autorisée. Un capital de 200 € évolue selon $u_n = 200e^{0,05n}$, où n est le nombre d'années.

- Montre que (u_n) est géométrique ; donne sa raison (arrondie à 10^{-3}) et u_0 .
- Calcule u_{10} à 10^{-2} près.
- Détermine le plus petit entier n tel que $u_n \geq 400$.
- En utilisant $e^x \geq x + 1$, justifie que $e^{0,05} \geq 1,05$. Que peut-on en conclure sur ce placement comparé à un taux annuel de 5 % ?