

Fonction exponentielle

Corrigé du contrôle - 1ère

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice interdite.

1 Calcul sur les exponentielles / 4 pts

Contrôle de 55 minutes. Calculatrice autorisée pour les exercices 4 et 5 seulement.

Barème : 1) 2 pts ; 2) 1 pt ; 3) 1 pt.

- (1 pt) $A = e^{4x-x} / e^{3x-2} = e^{3x} / e^{3x-2} = e^{3x-(3x-2)} = e^2$. (1 pt) $(e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + 2 + e^{-2x}$ et $(e^x - e^{-x})^2 = e^{2x} - 2 + e^{-2x}$. La différence vaut **B = 4**.
- (1 pt) $x^2 - 2x = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$. $\Delta = 4 + 12 = 16$, $x = \frac{2-4}{2} = -1$ ou $x = \frac{2+4}{2} = 3$. **S = {-1 ; 3}**.
- (1 pt) Exponentielle strictement croissante : $1 - 2x < x + 4 \Leftrightarrow -3 < 3x \Leftrightarrow x > -1$. **S =]-1 ; +∞[**.

2 Étude d'une fonction produit / 5 pts

Barème : a) 1,5 pt ; b) 1,5 pt ; c) 1 pt ; d) 1 pt.

- (1,5 pt) $g = uv$, $u(x) = 3 - x$, $u' = -1$, $v(x) = e^{x/2}$, $v'(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}$. $g'(x) = -e^{x/2} + (3 - x) \times \frac{1}{2}e^{x/2} = e^{x/2}(-1 + \frac{3-x}{2}) = e^{x/2} \times \frac{1-x}{2}$. ✓
- (1,5 pt) $e^{x/2} > 0$ donc $g'(x)$ a le signe de $1 - x$: positif sur $]-\infty ; 1[$, négatif sur $]1 ; +\infty[$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	$2e^{0,5}$	↘	

Maximum : $g(1) = 2e^{1/2} \approx \mathbf{3,297}$.

- (1 pt) $g(0) = 3$; $g'(0) = \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}$. Tangente : **y = 1/2x + 3**.
- (1 pt) $e^{x/2} \neq 0$, donc $g(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - x = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x = 3}$. Comme $e^{x/2} > 0$, $g(x) > 0$ pour $x < 3$ et $g(x) < 0$ pour $x > 3$.

3 Une propriété qui caractérise l'exponentielle / 3 pts

Barème : a) 2 pts ; b) 1 pt.

- (1 pt) $\phi'(x) = f'(x)e^{-2x} + f(x)(-2e^{-2x}) = (f'(x) - 2f(x))e^{-2x} = 0$. (1 pt) ϕ est dérivable

Fiche en ligne : maths-facile.eu/fonction-exponentielle-corrige-contrôle-1ere/ · Cours, exercices et contrôles corrigés

de dérivée nulle sur $\mathbb{R}$, donc constante, égale à $\varphi(0) = f(0)e^0 = 3$.

b. (0,5 pt) $f(x)e^{-2x} = 3$ donc **$f(x) = 3e^{2x}$** . (0,5 pt) $f(0,5) = 3e^1 = 3e \approx \mathbf{8,155}$.

4 Concentration d'un médicament / 4 pts

Barème : a) 1 pt ; b) 1 pt ; c) 2 pts.

a. (1 pt) $C(0) = \mathbf{12 \text{ mg/L}}$; $C(3) = 12e^{-0,6} \approx \mathbf{6,586 \text{ mg/L}}$.

b. (1 pt) $C'(t) = 12 \times (-0,2)e^{-0,2t} = \mathbf{-2,4e^{-0,2t} < 0}$: C est strictement décroissante. À $t = 0$: $C'(0) = -2,4 \text{ mg/L par heure}$.

c. (2 pts) C est strictement décroissante. $C(10) = 12e^{-2} \approx 1,624 > 1,5$ et $C(11) = 12e^{-2,2} \approx 1,330 < 1,5$. Il faut renouveler le traitement au bout de **11 heures**.

5 Capital à intérêts continus / 4 pts

Barème : a) 1 pt ; b) 1 pt ; c) 1,5 pt ; d) 0,5 pt.

a. (1 pt) $u_{n+1} = 200e^{0,05n+0,05} = e^{0,05}u_n$: géométrique de raison **$e^{0,05} \approx 1,051$** , avec **$u_0 = 200$** .

b. (1 pt) $u_{10} = 200e^{0,5} \approx \mathbf{329,74 \text{ €}}$.

c. (1,5 pt) La suite est strictement croissante. $u_{13} = 200e^{0,65} \approx 383,11 < 400$ et $u_{14} = 200e^{0,7} \approx 402,75 \geq 400$. Donc **$n = 14$** .

d. (0,5 pt) Avec $x = 0,05$: $e^{0,05} \geq 1,05$. La raison $e^{0,05}$ est au moins égale à 1,05 : ce placement rapporte au moins autant qu'un taux annuel de 5 % (augmenter de 5 % revient à multiplier par 1,05).