

Fonction exponentielle

Corrigé des exercices - 1ère

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Simplifier des produits et quotients ★★★

- a. $e^3 \times e^{-5} = e^{3+(-5)} = e^{-2}$.
- b. $(e^2)^3 = e^{2 \times 3} = e^6$.
- c. $e^7 / e^4 = e^{7-4} = e^3$.
- d. $1 / e^{-2} = e^{-(-2)} = e^2$.
- e. $e^x \times e^{2x} = e^{3x}$.
- f. $(e^{-x})^2 = e^{-2x}$, puis $e^{-2x} \times e^x = e^{-x}$.
- g. $e^{x+1} \times e^{1-x} = e^{(x+1)+(1-x)} = e^2$: l'expression ne dépend pas de x.

2 Vrai ou faux ? (justifie) ★★★

- a. **Vrai** : $\exp(0) = 1$ par définition.
- b. **Faux** : $e^{a+b} = e^a \times e^b$. Contre-exemple $a = b = 0$: $e^0 = 1$ alors que $e^0 + e^0 = 2$.
- c. **Faux** : $e^x > 0$ pour tout x.
- d. **Vrai** : $(e^x)^2 = e^x \times e^x = e^{x+x} = e^{2x}$.
- e. **Faux** : $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc aussi sur $] -\infty ; 0]$.
- f. **Vrai** : $-3 < -2$ et $\exp$ est strictement croissante ($e^{-3} \approx 0,050$ et $e^{-2} \approx 0,135$).
- g. **Vrai** : c'est la propriété « la courbe est au-dessus de sa tangente en 0 ».

3 Valeurs approchées à la calculatrice ★★★

- a) $e^{1,5} \approx \mathbf{4,482}$; b) $e^{-0,3} \approx \mathbf{0,741}$; c) $e^{2,5} \approx \mathbf{12,182}$; d) $e^{-1,2} \approx \mathbf{0,301}$; e) $e^{0,1} \approx \mathbf{1,105}$.

Rangement : l'exponentielle est strictement croissante, donc il suffit de ranger les exposants : $-1,2 < -0,3 < 0,1 < 1,5 < 2,5$. Donc $e^{-1,2} < e^{-0,3} < e^{0,1} < e^{1,5} < e^{2,5}$, ce qui est cohérent avec les valeurs.

4 Équations avec des exponentielles ★★★

- a. $e^{2x} = e^5 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = 2,5$. **S = {2,5}**.
- b. $1 = e^0$, donc $e^{3x-1} = e^0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{1/3}$. **S = {1/3}**.
- c. $e^{x^2} = e^{4x-3} \Leftrightarrow x^2 = 4x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$. $\Delta = 16 - 12 = 4$, donc $x = \mathbf{4-2/2} = 1$ ou $x = \mathbf{4+2/2} = 3$. **S = {1 ; 3}**. (Vérification : $1^2 = 4 \times 1 - 3 \checkmark$; $3^2 = 4 \times 3 - 3 = 9$)

✓.)

d. $e^x > 0$ pour tout x , donc $e^x = -2$ est impossible. $S = \emptyset$.

e. $e = e^1$, donc $e^{2x+1} = e^1 \Leftrightarrow 2x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$. $S = \{0\}$.

5 Inéquations avec des exponentielles ★★★

a. L'exponentielle est strictement croissante : $e^x < e^{-2} \Leftrightarrow x < -2$. $S =]-\infty ; -2[$.

b. $e^{-x+1} \geq e^{3x} \Leftrightarrow -x + 1 \geq 3x \Leftrightarrow 1 \geq 4x \Leftrightarrow x \leq 1/4$. $S =]-\infty ; 1/4]$.

c. $1 = e^0 : e^{2x-3} > e^0 \Leftrightarrow 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 1,5$. $S =]1,5 ; +\infty[$.

d. $e^x > 0$ donc $e^x + 1 > 1 > 0$ pour tout x . $S = \mathbb{R}$.

6 Dériver des fonctions avec e^{ax+b} ★★★

a. $f'(x) = 3e^{3x}$.

b. $f'(x) = -2e^{-2x+1}$.

c. $f'(x) = 5 \times (-0,4) e^{-0,4x} = -2e^{-0,4x}$.

d. $e^{x/2} = e^{0,5x}$, donc $f'(x) = 0,5 e^{x/2}$.

e. $f'(x) = 4 - 2e^{2x} = 4 - 2e^{2x}$.

f. $f'(x) = e^x + 2x$.

7 Étudier un signe ★★★

On utilise $e^x > 0$: une exponentielle ne change jamais le signe d'un produit.

a. $(x - 3)e^x$ a le signe de $x - 3$: négatif pour $x < 3$, nul en 3, positif pour $x > 3$.

b. $-4e^{-x}$: on multiplie un nombre strictement positif par -4 , donc **strictement négatif pour tout x** .

c. $e^x + 1 > 0$, donc l'expression a le signe de $2 - x$: positive pour $x < 2$, nulle en 2, négative pour $x > 2$.

d. $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ et $e^{-2x} > 0$: **strictement positif pour tout x** .

8 Développer et réduire ★★★

a. $(e^x + 1)(e^x - 1) = (e^x)^2 - 1 = e^{2x} - 1$.

b. $(e^x + 2)^2 = (e^x)^2 + 4e^x + 4 = e^{2x} + 4e^x + 4$.

c. $e^x e^{-x} + e^x e^{2x} = e^0 + e^{3x} = 1 + e^{3x}$.

d. $(e^{2x})^2 = e^{4x}$, puis $e^{4x} / e^{3x} = e^x$.

9 Tangentes à des courbes exponentielles ★★★

On applique $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

a. $f(0) = 1$, $f'(x) = 2e^{2x}$, $f'(0) = 2$. Tangente : $y = 2(x - 0) + 1$, soit **$y = 2x + 1$** .

- b. $f(1) = e$, $f'(1) = e$. Tangente : $y = e(x - 1) + e = ex - e + e$, soit **$y = ex$** (elle passe par l'origine).
- c. $f(1/2) = e^0 = 1$; $f'(x) = 2e^{2x-1}$, donc $f'(1/2) = 2e^0 = 2$. Tangente : $y = 2(x - 1/2) + 1 = 2x - 1 + 1$, soit **$y = 2x$** .

10 Retrouver les paramètres sur une courbe ★★★

- a. $f(0) = A e^0 = A$, et $f(0) = 3$ d'après le point A : **$A = 3$** .
- b. $f(2) = 3e^{2k} = 3/e = 3e^{-1}$, donc $e^{2k} = e^{-1} \Leftrightarrow 2k = -1 \Leftrightarrow k = -0,5$. Comme $k < 0$, f est **strictement décroissante** : $f(x) = 3e^{-0,5x}$.
- c. $f'(x) = 3 \times (-0,5)e^{-0,5x} = -1,5e^{-0,5x}$, donc $f'(0) = -1,5$. Tangente : **$y = -1,5x + 3$** .
- d. $f(4) = 3e^{-2} \approx$ **0,406**.

11 Étude de $f(x) = (x + 1)e^x$ ★★★

- a. $f = uv$ avec $u(x) = x + 1$, $u' = 1$, $v(x) = e^x$, $v' = e^x$. Donc $f'(x) = e^x + (x + 1)e^x =$ **$(x + 2)e^x$** .
- b. $e^x > 0$: $f'(x)$ a le signe de $x + 2$, négatif pour $x < -2$ et positif pour $x > -2$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	$-e^{-2}$	$\nearrow$	

- c. Le minimum est $f(-2) = (-1)e^{-2} = -e^{-2} \approx$ **-0,135**.
- d. $(x + 1)e^x = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$ (car $e^x \neq 0$) $\Leftrightarrow$ **$x = -1$** .

12 Étude de $f(x) = (2x - 1)e^{-x}$ ★★★

- a. $u(x) = 2x - 1$, $u' = 2$, $v(x) = e^{-x}$, $v'(x) = -e^{-x}$. $f'(x) = 2e^{-x} - (2x - 1)e^{-x} = (2 - 2x + 1)e^{-x} =$ **$(3 - 2x)e^{-x}$** .
- b. $e^{-x} > 0$: $f'(x)$ a le signe de $3 - 2x$, positif si $x < 1,5$, négatif si $x > 1,5$.

x	$-\infty$		1,5		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	$2e^{-1,5}$	$\searrow$	

- c. Maximum : $f(1,5) = (3 - 1)e^{-1,5} = 2e^{-1,5} \approx$ **0,446**.
- d. $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x - 1 \geq 0$ (car $e^{-x} > 0$) $\Leftrightarrow x \geq 0,5$. **$S = [0,5 ; +\infty[$** .

13 Équations à factoriser ★★★

- a. $e^x \neq 0$ donc $x - 1 = 0$. **$S = \{1\}$** .
- b. $e^{2x} - e^x = e^x(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 = e^0 \Leftrightarrow x = 0$. **$S = \{0\}$** .
- c. $x e^x + e^x = (x + 1)e^x = 0 \Leftrightarrow x = -1$. **$S = \{-1\}$** .
- d. $e^{2x} = e^{x+3} \Leftrightarrow 2x = x + 3 \Leftrightarrow x = 3$. **$S = \{3\}$** .

e. $e^x + 1 > 0$ donc le produit est nul $\Leftrightarrow x - 4 = 0$. **S = {4}**.

14 Démontrer des identités ★★★

- a. $(e^x - e^{-x})^2 = e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x} = e^{2x} - 2 + e^{-2x}$. On ajoute 4 : $e^{2x} + 2 + e^{-2x}$, qui est bien le développement de $(e^x + e^{-x})^2$. ✓
- b. On multiplie le numérateur et le dénominateur de la fraction de droite par e^x (non nul) : $1 / (1 + e^{-x}) = e^x / (e^x + e^x e^{-x}) = e^x / (e^x + 1)$. ✓
- c. On multiplie par e^x le numérateur et le dénominateur de la fraction de droite : $(1 - e^{-x})e^x = e^x - 1$ et $(1 + e^{-x})e^x = e^x + 1$. On obtient $(e^x - 1) / (e^x + 1)$. ✓

15 Une suite géométrique en disguise ★★★

- a. $u_{n+1} = 3e^{-0,2(n+1)} = 3e^{-0,2n} \times e^{-0,2} = e^{-0,2} u_n$. La suite est géométrique de raison **q = $e^{-0,2} \approx 0,819$** et de premier terme **$u_0 = 3$** .
- b. $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$: la suite est **strictement décroissante**.
- c. $u_5 = 3e^{-1} \approx 1,104$.
- d. On teste : $u_{17} = 3e^{-3,4} \approx 0,1001 > 0,1$ et $u_{18} = 3e^{-3,6} \approx 0,0820 < 0,1$. Comme la suite est décroissante, le plus petit entier est **n = 18**.

16 Culture de bactéries ★★★

- a. $N(0) = 500e^0 = 500$ **bactéries**.
- b. $N(3) = 500e^{0,9} \approx 1230$ **bactéries**.
- c. $N'(t) = 500 \times 0,3 e^{0,3t} = 150e^{0,3t}$. $N'(0) = 150$: au départ, la population augmente à la vitesse d'environ 150 bactéries par heure. $N'(t) > 0$: N est croissante.
- d. N est strictement croissante. $N(9) = 500e^{2,7} \approx 7440 < 10\,000$ et $N(10) = 500e^3 \approx 10043 > 10\,000$. Le seuil est dépassé au bout de **10 heures**.

17 Désintégration d'un échantillon ★★★

- a. $m(0) = 80$ **g**. Ici $k = -0,05 < 0$: **décroissance exponentielle** ($m'(t) = -4e^{-0,05t} < 0$).
- b. $m(10) = 80e^{-0,5} \approx 48,52$ **g**.
- c. $m(13) = 80e^{-0,65} \approx 41,76 > 40$ et $m(14) = 80e^{-0,7} \approx 39,73 < 40$. Comme m est décroissante, le premier entier est **14 jours** (la demi-vie est un peu inférieure).

18 Déterminer $f(x) = A e^{kx}$ avec deux conditions ★★★

- a. $f(0) = A e^0 = A$, donc **A = 5**. Puis $f'(x) = A k e^{kx}$ et $f'(0) = A k = 5k = -2$, donc **k = -0,4**. Ainsi $f(x) = 5e^{-0,4x}$.
- b. $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = -2x + 5$.
- c. $f(5) = 5e^{-2} \approx 0,677$.

19 Conséquences de l'inégalité $e^x \geq x + 1$ ★★★

- On applique l'inégalité au réel $-x$: $e^{-x} \geq -x + 1 = 1 - x$. ✓
- Si $x < 1$, alors $1 - x > 0$. De $e^{-x} \geq 1 - x > 0$, on passe aux inverses (qui renversent l'ordre pour des nombres positifs) : $1 / e^x \leq 1 / (1 - x)$, c'est-à-dire $e^x \leq 1 / (1 - x)$. ✓
- Avec $x = 1/n$: $e^{1/n} \geq 1 + 1/n > 0$. On élève à la puissance n (la fonction $t \mapsto t^n$ est croissante sur $[0 ; +\infty[$) : $(e^{1/n})^n \geq (1 + 1/n)^n$. Or $(e^{1/n})^n = e^1 = e$. Donc $(1 + 1/n)^n \leq e$. Pour $n = 10$: $1,1^{10} \approx 2,5937 \leq e \approx 2,7183$. ✓
- Avec $x = -1/n$: $e^{-1/n} \geq 1 - 1/n \geq 0$ (car $n \geq 2$). En élevant à la puissance n : $e^{-1} \geq (1 - 1/n)^n$. Pour $n = 10$: $0,9^{10} \approx 0,3487 \leq e^{-1} \approx 0,3679$. ✓

20 Les solutions de $f' = f$ ★★★

- $\varphi'(x) = f'(x)e^{-x} + f(x) \times (-e^{-x}) = (f'(x) - f(x)) e^{-x} = 0$ car $f' = f$. Une fonction dérivable de dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ est constante : **φ est constante**, égale à $\varphi(0) = f(0)e^0 = f(0)$.
- Donc $f(x)e^{-x} = f(0)$ pour tout x ; en multipliant par e^x : **$f(x) = f(0)e^x$** . Les solutions de $f' = f$ sont donc toutes les fonctions $x \mapsto C e^x$.
- $f(x) = f(0)e^x$ avec $f(0) = -2$: **$f(x) = -2e^x$** .
- $g(x) = g(0)e^x$, donc $g(1) = g(0) \times e = e^2$, d'où $g(0) = e$. Ainsi **$g(x) = e \times e^x = e^{x+1}$** . Vérification : $g(1) = e^2$. ✓

21 Une fonction avec un quotient ★★★

- $f = u/v$ avec $u(x) = e^x - 2$, $u' = e^x$, $v(x) = e^x + 1$, $v' = e^x$. Alors $f'(x) = [\text{numérateur}] / (e^x + 1)^2$ avec $[\text{numérateur}] = e^x(e^x + 1) - (e^x - 2)e^x$. Numérateur : $e^x[(e^x + 1) - (e^x - 2)] = e^x \times 3$. Donc **$f'(x) = 3e^x / (e^x + 1)^2$** .
- Pour tout x , $3e^x > 0$ et $(e^x + 1)^2 > 0$: $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$		↗	

$$(f(0) = 1 - 2/1 + 1 = -0,5.)$$

- $1 - 3 / (e^0 + 1) = (e^0 + 1 - 3) / (e^0 + 1) = (e^0 - 2) / (e^0 + 1) = f(x)$. ✓ (Cette écriture montre aussi que $f(x) < 1$ pour tout x .)
- $f(0) = -1/2$ et $f'(0) = 3/4$. Tangente : **$y = 3/4x - 1/2$** .

22 Fonction « sinus hyperbolique » ★★★

- $f(-x) = (e^0 - e^0) / 2 = -(e^0 - e^0) / 2 = -f(x)$. La fonction est **impaire** : sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.

- b. $f'(x) = (e^x + e^{-x}) / 2$ (car la dérivée de e^{-x} est $-e^{-x}$). C'est une somme de deux nombres strictement positifs : $f'(x) > 0$ et **f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$** .
- c. $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0$. Comme f est strictement croissante et $f(0) = 0$: $f(x) < 0$ pour $x < 0$ et $f(x) > 0$ pour $x > 0$.
- d. $(e^{x/2} - e^{-x/2})^2 = e^x - 2 + e^{-x} \geq 0$ (un carré). Donc **$e^x + e^{-x} \geq 2$** , avec égalité seulement pour $x = 0$.

23 Étude de $f(x) = (x^2 + x)e^{-x}$ ★★★

- a. $u(x) = x^2 + x$, $u' = 2x + 1$, $v = e^{-x}$, $v' = -e^{-x}$. $f'(x) = (2x + 1)e^{-x} - (x^2 + x)e^{-x} = (-x^2 + x + 1)e^{-x}$. ✓
- b. $\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$, racines $x_1 = 1 - \sqrt{5}/2 \approx -0,618$ et $x_2 = 1 + \sqrt{5}/2 \approx 1,618$. Le trinôme $-x^2 + x + 1$ (coefficient de x^2 négatif) est positif entre les racines et négatif à l'extérieur. Comme $e^{-x} > 0$, f' a le même signe.
- c. f est décroissante sur $]-\infty ; x_1]$, croissante sur $[x_1 ; x_2]$, décroissante sur $[x_2 ; +\infty[$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		$\searrow$	-0,438	$\nearrow$	0,840	$\searrow$	

Valeurs : $f(x_1) = (2 - \sqrt{5})e^{(\sqrt{5}-1)/2} \approx \mathbf{-0,438}$ (minimum local) et $f(x_2) = (2 + \sqrt{5})e^{-(1+\sqrt{5})/2} \approx \mathbf{0,840}$ (maximum local). (On utilise $x^2 = x + 1$ pour les racines, donc $x^2 + x = 2x + 1$.)

24 Refroidissement d'une boisson ★★★

- a. $T(0) = 20 + 60 = \mathbf{80^\circ C}$. $T(10) = 20 + 60e^{-1} \approx 20 + 22,1 \approx \mathbf{42,1^\circ C}$.
- b. $T'(t) = 60 \times (-0,1)e^{-0,1t} = \mathbf{-6 \times e^{-0,1t} < 0}$: T est strictement décroissante. À $t = 0$, $T'(0) = -6$: la boisson perd environ $6^\circ C$ par minute au début.
- c. $60e^{-0,1t} > 0$, donc $T(t) > 20$: la boisson se rapproche de la température de la pièce sans jamais l'atteindre.
- d. $T(t) < 30 \Leftrightarrow 60e^{-0,1t} < 10$. $T(17) \approx 30,96 > 30$ et $T(18) = 20 + 60e^{-1,8} \approx 29,92 < 30$. La boisson passe sous $30^\circ C$ au bout de **18 minutes**.

