

Fonction exponentielle

Cours de maths - 1ère

Une population de bactéries double toutes les heures, un médicament s'élimine peu à peu, un capital grandit avec ses intérêts : dans ces situations, **la vitesse de variation est proportionnelle à la quantité elle-même**. Les mathématiciens ont inventé une fonction pour décrire cela : la **fonction exponentielle**. Elle est égale à sa propre dérivée, elle ne s'annule jamais et elle transforme les **sommes en produits**. Dans ce chapitre, tu apprends à la définir, à la manipuler, à la dériver et à t'en servir pour modéliser une croissance ou une décroissance.

Prérequis à revoir en 5 lignes • La dérivée de $x \mapsto g(ax + b)$ est $x \mapsto a \times g'(ax + b)$.
 • $(uv)' = u'v + uv'$ et $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$.
 • Si $f' > 0$ sur un intervalle, f est strictement croissante ; si $f' < 0$, elle est strictement décroissante.
 • La tangente en a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
 • Une suite géométrique de raison q vérifie $u_{n+1} = q u_n$ et $u_n = u_0 q^n$.

1. Définition de la fonction exponentielle

Cherchons une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ qui soit **égale à sa dérivée** et qui vaille 1 en 0. Une telle fonction existe et il n'y en a qu'une : c'est le point de départ de tout le chapitre.

Théorème (existence et unicité, admis) Il existe une **unique** fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que **$f' = f$** et **$f(0) = 1$** . Cette fonction s'appelle la **fonction exponentielle** et se note **exp**.

On a donc, pour tout réel x : **$\exp'(x) = \exp(x)$** , et **$\exp(0) = 1$** .

Lire la définition sur un point Le nombre dérivé de $\exp$ en 0 est $\exp'(0) = \exp(0) = 1$: la tangente à la courbe au point $A(0 ; 1)$ a pour coefficient directeur 1. Son équation est $y = 1 \times (x - 0) + 1$, soit **$y = x + 1$** .

Propriété : exp ne s'annule jamais Pour tout réel x , $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$. En particulier $\exp(x) \neq 0$ et $\exp(-x) = 1/\exp(x)$.

Démonstration. Posons $\phi(x) = \exp(x) \times \exp(-x)$. La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\phi'(x) = \exp'(x) \exp(-x) + \exp(x) \times (-\exp'(-x)) = \exp(x) \exp(-x) - \exp(x) \exp(-x) = 0$, car $\exp' = \exp$. Sa dérivée est nulle sur $\mathbb{R}$, donc ϕ est constante, égale à $\phi(0) = \exp(0) \times \exp(0) = 1 \times 1 = 1$. Ainsi $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$ pour tout x : le produit de deux nombres ne

peut valoir 1 que si aucun d'eux n'est nul. ■

2. La relation fonctionnelle

Théorème (relation fonctionnelle) Pour tous réels a et b : $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

Démonstration. Fixons un réel a et posons, pour tout x , $g(x) = \frac{\exp(a+x)}{\exp(a)}$ (le dénominateur n'est pas nul). La fonction g est dérivable et $g'(x) = \frac{\exp'(a+x)}{\exp(a)} = \frac{\exp(a+x)}{\exp(a)} = g(x)$. De plus $g(0) = \frac{\exp(a)}{\exp(a)} = 1$. Par l'unicité du théorème de la partie 1, $g = \exp$. Donc $\exp(x) = \frac{\exp(a+x)}{\exp(a)}$, c'est-à-dire $\exp(a + x) = \exp(a) \times \exp(x)$. ■

On en déduit toutes les règles de calcul, comme pour les puissances :

Conséquences (pour tous réels a, b et tout entier relatif n) • $\exp(-a) = 1/\exp(a)$

- $\exp(a - b) = \exp(a)/\exp(b)$
- $\exp(na) = (\exp(a))^n$

Justifications : $\exp(a - b) \times \exp(b) = \exp(a)$ donne le quotient ; la dernière formule se démontre en appliquant n fois la relation fonctionnelle ($\exp(2a) = \exp(a + a) = \exp(a)^2$, etc.).

Piège classique La relation fonctionnelle transforme une **somme en produit**, jamais en somme : $\exp(a + b) \neq \exp(a) + \exp(b)$. Avec $a = b = 0$: $\exp(0 + 0) = 1$ alors que $\exp(0) + \exp(0) = 2$.

3. Le nombre e et la notation puissance

Le nombre e On note $e = \exp(1)$. Une valeur approchée est $e \approx 2,718\ 28$. C'est un nombre irrationnel (on l'admet).

D'après la dernière conséquence, pour tout entier n : $\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n = e^n$. La fonction $\exp$ prolonge donc la puissance de e à tous les réels, ce qui justifie la notation :

Notation Pour tout réel x , on écrit $\exp(x) = e^x$. On a $e^0 = 1$ et $e^1 = e$.

Avec cette notation, les règles de la partie 2 deviennent celles des puissances que tu connais déjà :

Règles de calcul Pour tous réels a, b et tout entier n :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b ; e^{-a} = 1 / e^a ; e^{a-b} = e^a / e^b ; (e^a)^n = e^{na}.$$

Simplifier une expression $A = (e^{3x} \times e^{-x}) / e^{2x+1}$. On regroupe les exposants : $e^{3x} \times e^{-x} = e^{2x}$, puis $e^{2x} / e^{2x+1} = e^{2x-(2x+1)} = e^{-1} = \mathbf{1/e}$. L'expression ne dépend pas de x ! Elle vaut $\mathbf{1/e} \approx 0,368$.

Développer $(e^x + e^{-x})^2 = (e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2 = e^{2x} + 2 + e^{-2x}$, car $e^x e^{-x} = e^0 = 1$.

Astuce de calcul Réécris toujours chaque terme sous la forme « un seul $e^{\dots}$ » avant de conclure. Et n'oublie que la calculatrice donne les valeurs approchées avec la touche e^x : $e^{0,5} \approx 1,649$; $e^{-2} \approx 0,135$.

4. Signe, variations et courbe

Propriété : signe Pour tout réel x , $\mathbf{e^x > 0}$.

Démonstration. Pour tout x , $e^x = e^{x/2 + x/2} = (e^{x/2})^2 \geq 0$, et $e^x \neq 0$ d'après la partie 1. Donc $e^x > 0$. ■

Propriété : variations La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

En effet, sa dérivée $\exp'(x) = e^x$ est strictement positive. On en tire une règle de résolution essentielle :

Équations et inéquations Pour tous réels a et b : $\mathbf{e^a = e^b \Leftrightarrow a = b}$ et $\mathbf{e^a < e^b \Leftrightarrow a < b}$ (idem avec $\leq, >, \geq$).

Et $e^x = k$ n'a aucune solution si $k \leq 0$.

Résoudre $e^{2x-1} \geq e^{x+4}$ Comme l'exponentielle est strictement croissante, l'inégalité équivaut à $2x - 1 \geq x + 4$, soit $x \geq 5$. Ensemble des solutions : $S = [5 ; +\infty[$.

Méthode : résoudre une équation avec des exponentielles 1. Si les deux membres sont des $e^{\dots}$, identifie les exposants.

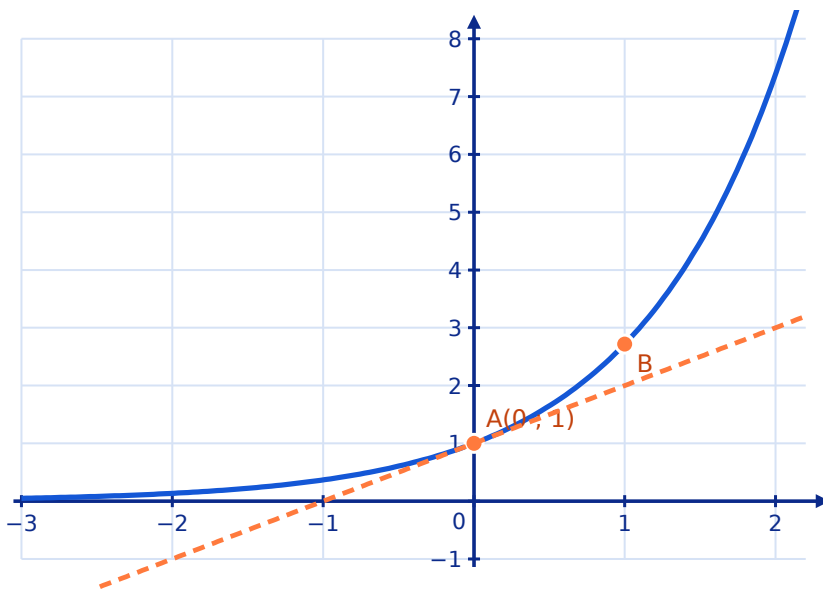
2. Si un membre est 0 : factorise. Un produit est nul si l'un de ses facteurs l'est, et e^x n'est jamais nul.

3. Rédige la conclusion avec l'ensemble des solutions.

Équation produit $(x - 2)e^{3x} = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ (car $e^{3x} \neq 0$) $\Leftrightarrow x = 2$. De même $e^{2x} - e^x = e^x(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 = e^0 \Leftrightarrow x = 0$.

Voici quelques valeurs (arrondies à 10^{-3}) et la courbe de la fonction exponentielle :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
e^x	0,050	0,135	0,368	1,000	2,718	7,389	20,086



Courbe de l'exponentielle (bleu) et sa tangente en A(0 ; 1) d'équation $y = x + 1$ (orange pointillé).

La courbe est **entièrement au-dessus de l'axe des abscisses**, elle passe par A(0 ; 1) et par B(1 ; e). Elle monte de plus en plus vite quand x augmente, et elle se rapproche de l'axe des abscisses quand x devient très négatif ($e^{-3} \approx 0,050$).

Propriété : $e^x \geq x + 1$ Pour tout réel x , $e^x \geq x + 1$: la courbe est au-dessus de sa tangente en 0.

Démonstration. Soit $g(x) = e^x - x - 1$. Alors $g'(x) = e^x - 1$. Or $e^x \geq 1 = e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$: g' est négative sur $]-\infty ; 0]$ et positive sur $[0 ; +\infty[$. Donc g est décroissante puis croissante, avec un minimum $g(0) = 1 - 0 - 1 = 0$. Ainsi $g(x) \geq 0$ pour tout x . ■

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$		↘	0	↗	

5. Dérivée de $x \mapsto e^{ax+b}$

Propriété Soient a et b deux réels. La fonction $f : x \mapsto e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et **$f'(x) = a e^{ax+b}$** .

C'est la règle de dérivation de $x \mapsto g(ax + b)$ appliquée à $g = \exp$, avec $g' = \exp$. Cas particuliers : $(e^x)' = e^x$; $(e^{-x})' = -e^{-x}$; $(e^{3x})' = 3e^{3x}$; $(e^{-0,5x+2})' = -0,5 e^{-0,5x+2}$.

Piège On ne dérive pas « e^{x^2} » comme « e^x » ! La formule ci-dessus vaut pour un exposant **affine** $ax + b$. Et ne dérive jamais e^{3x} en « $3x e^{3x-1}$ » : ce n'est pas une puissance de x .

Variations de $x \mapsto e^{ax+b}$ Comme $e^{ax+b} > 0$, la dérivée a le signe de a : la fonction est
 Fiche en ligne : maths-facile.eu/fonction-exponentielle-cours-1ere/ · Cours, exercices et contrôles corrigés sur maths-facile.eu · page 4/8

strictement **croissante** si $a > 0$, strictement **décroissante** si $a < 0$, et constante si $a = 0$.

Pour les produits et les quotients, on combine avec les formules habituelles.

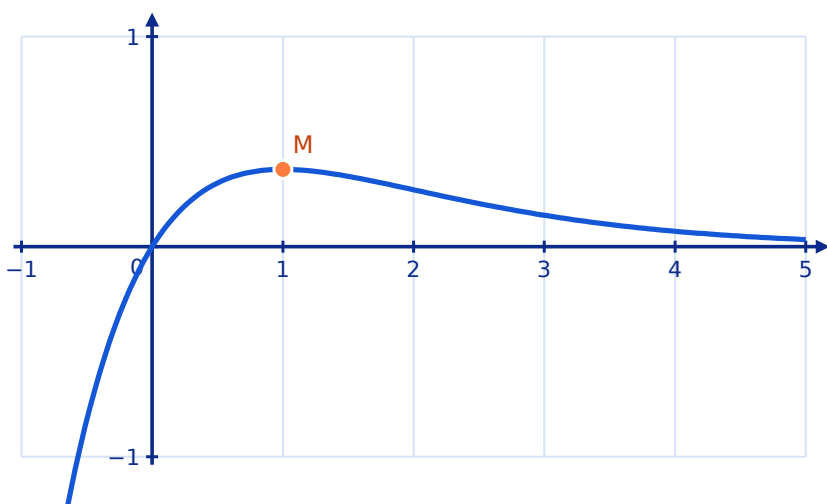
Méthode : étudier $f(x) = (\text{polynôme}) \times e^{ax+b}$

1. Dérive avec $(uv)' = u'v + uv'$.
2. Factorise par e^{ax+b} : $f'(x) = (\dots) e^{ax+b}$.
3. Comme $e^{ax+b} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du facteur entre parenthèses.
4. Dresse le tableau de variations.

Étude de $f(x) = x e^{-x}$ $f = uv$ avec $u(x) = x$, $u'(x) = 1$, $v(x) = e^{-x}$, $v'(x) = -e^{-x}$. Donc $f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1 - x) e^{-x}$. Comme $e^{-x} > 0$, $f'(x)$ a le signe de $1 - x$: positif pour $x < 1$, négatif pour $x > 1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	

Le maximum de f est $f(1) = 1/e \approx 0,368$.

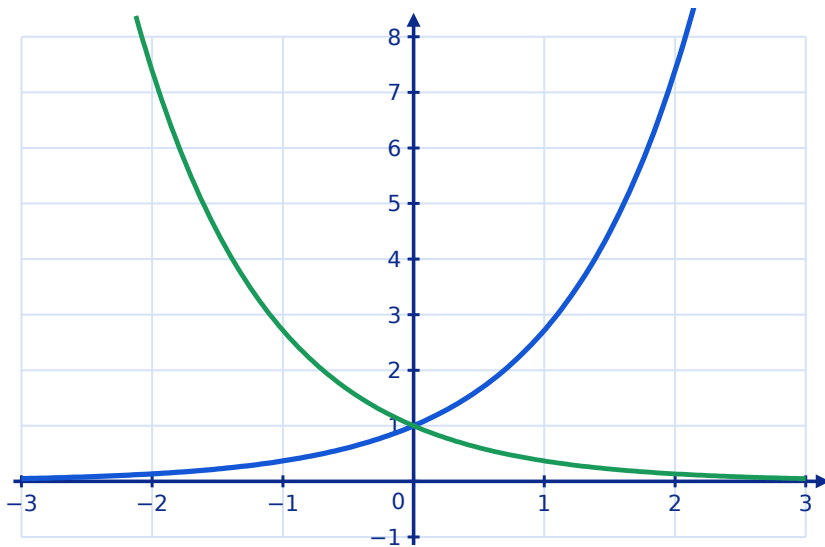


Courbe de $f(x) = x e^{-x}$: maximum au point $M(1 ; 1/e)$.

Tangente Soit $f(x) = e^{2x}$ en $x = 0$: $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2e^0 = 2$. La tangente a pour équation $y = 2(x - 0) + 1$, soit **$y = 2x + 1$** .

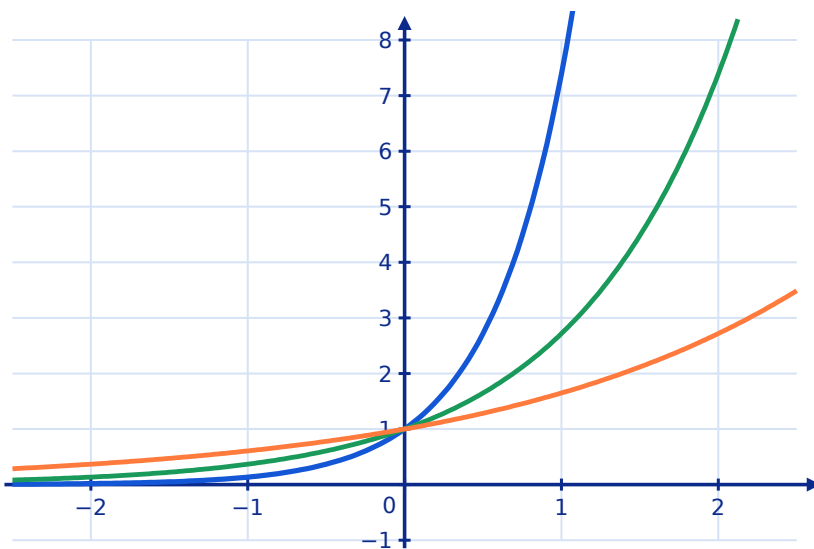
6. Comparer les courbes de $x \mapsto e^{kx}$

Quand on change le coefficient k de l'exposant, la courbe de $x \mapsto e^{kx}$ passe toujours par le point $(0 ; 1)$ (car $e^0 = 1$), mais pas avec la même pente : la tangente en ce point a pour coefficient directeur k .



Les courbes de $x \mapsto e^x$ (bleu) et $x \mapsto e^{-x}$ (vert) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Symétrie Les courbes de $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont **symétriques par rapport à l'axe des ordonnées**, car le point $(x ; e^x)$ est remplacé par $(-x ; e^x) = (-x ; e^{-(-x)})$.



Pour $x > 0$, plus k est grand, plus la courbe de e^{kx} monte vite.

Lecture Pour $k = 2$: $e^2 \approx 7,389$ à $x = 1$ contre $e^1 \approx 2,718$ pour $k = 1$ et $e^{0,5} \approx 1,649$ pour $k = 0,5$. Pour $x < 0$, c'est l'inverse : e^{2x} est la plus petite des trois.

7. Lien avec les suites géométriques

Propriété Soit a un réel. La suite (u_n) définie par $u_n = e^{an}$ est une **suite géométrique de raison e^a** et de premier terme $u_0 = 1$.

En effet, $u_{n+1} = e^{a(n+1)} = e^{an+a} = e^a \times e^{an} = e^a u_n$. Plus généralement $u_n = C e^{an}$ est géométrique de raison e^a et de premier terme C .

Une suite géométrique cachée Soit $u_n = 5e^{-0,3n}$. Sa raison est $q = e^{-0,3} \approx 0,741$.

Comme $0 < q < 1$, la suite est décroissante. Son premier terme est $u_0 = 5$ et $u_{10} = 5e^{-3} \approx 0,249$.

Pourquoi c'est utile La fonction exponentielle est la version « continue » de la suite géométrique : une suite géométrique multiplie par la même raison à chaque étape de 1 unité, la fonction $x \mapsto C e^{kx}$ le fait pour **n'importe quelle durée**.

8. Modéliser une croissance ou une décroissance

Fonctions $x \mapsto C e^{kx}$ Soient C et k deux réels, $C > 0$. La fonction $f : t \mapsto C e^{kt}$ vérifie **$f'(t) = k f(t)$** et $f(0) = C$. La vitesse de variation est proportionnelle à la quantité.

- Si **$k > 0$: croissance exponentielle** (f est strictement croissante).
- Si **$k < 0$: décroissance exponentielle** (f est strictement décroissante).

On modélise ainsi une population de bactéries, la quantité d'un médicament dans le sang, la désintégration radioactive, le refroidissement d'un objet vers la température de la pièce, ou un capital à intérêts composés.

Méthode : exploiter un modèle exponentiel 1. Identifie C (valeur en $t = 0$) et k (signe : croissance ou décroissance).

2. Calcule une valeur avec la touche e^x de la calculatrice.

3. Pour trouver à partir de quand une condition est réalisée, teste des valeurs de t (ou utilise un programme), en t'appuyant sur la monotonie.

Une population de bactéries Une culture contient 800 bactéries au départ et $N(t) = 800e^{0,25t}$ (t en heures). $N(0) = 800$ et $k = 0,25 > 0$: c'est une croissance. $N(4) = 800e^1 \approx 2175$ bactéries. Et $N'(t) = 200e^{0,25t} > 0$: la population augmente toujours.

Un seuil (programme Python) Quand la culture dépasse-t-elle 5 000 bactéries ? N est strictement croissante, donc on cherche le premier entier t tel que $N(t) > 5\,000$.

```
from math import exp
t = 0
while 800 * exp(0.25 * t) <= 5000:
    t = t + 1
print(t)
```

Le programme affiche 8 : $N(7) \approx 4604 < 5\,000 < N(8) \approx 5911$. Le seuil est franchi à la 8^e heure.

Croissance exponentielle ne veut pas dire « très grande » Au début, une exponentielle peut croître lentement ($e^{0,25t}$ ne vaut que 1,28 pour $t = 1$). C'est sa

vitesse proportionnelle à la quantité qui finit par la rendre explosive, et non son point de départ.

À retenir

- $\exp$ est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que **$\exp' = \exp$** et **$\exp(0) = 1$** ; on note $\exp(x) = e^x$, avec $e = \exp(1) \approx 2,718$.
- **$e^{a+b} = e^a e^b$** ; $e^{-a} = 1/e^a$; $e^{a-b} = e^a/e^b$; $(e^a)^n = e^{na}$.
- **$e^x > 0$** pour tout x ; $\exp$ est **strictement croissante** ; $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$; $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$.
- $e^x \geq x + 1$; la tangente en 0 est $y = x + 1$.
- **$(e^{ax+b})' = a e^{ax+b}$** ; pour étudier $(...)e^{ax+b}$, on factorise f' par e^{ax+b} (toujours > 0).
- (e^{an}) est une suite géométrique de raison e^a ; $t \mapsto C e^{kt}$ modélise une **croissance ($k > 0$)** ou une **décroissance ($k < 0$)** exponentielle.