

Fonction exponentielle et croissances comparées

Contrôle de maths - Terminale

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice interdite.

1 Équations et inéquations / 3 pts

Résous dans $\mathbb{R}$:

- a. $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$
- b. $e^{1-2x} > e^{-3}$

2 Dérivées et primitives / 3 pts

Calculatrice non autorisée.

- a. Dérive $g(x) = e^{x^2-3x}$.
- b. Dérive $h(x) = (x + 3)e^{2x}$ et factorise.
- c. Donne une primitive de $k(x) = 4x e^{x^2}$ puis de $m(x) = e^{-3x+1}$.

3 Limites / 3 pts

Calcule, en justifiant :

- a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x) e^{-x}$
- b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1) e^x$
- c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2)$

4 Étude de fonction / 8 pts

Calculatrice autorisée pour les valeurs approchées. Soit $f(x) = (2x - 1)e^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

- a. Calcule la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Que peut-on dire de la courbe ?
- b. Montre que $f'(x) = (3 - 2x)e^{-x}$ et dresse le tableau de variations complet.
- c. Donne l'équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse 0.
- d. Montre que $f''(x) = (2x - 5)e^{-x}$. Étudie la convexité et précise le point d'inflexion.
- e. Résous $f(x) = 0$.
- f. Combien de solutions l'équation $f(x) = 0,4$ admet-elle ? Justifie.

5 Modélisation : médicament / 3 pts

Calculatrice autorisée. La concentration d'un médicament dans le sang (en mg/L) vérifie $C' = -0,25 C$ (le temps t est en heures) avec $C(0) = 8$.

- Donne l'expression de $C(t)$.
- Calcule la demi-vie du médicament (valeur exacte puis approchée en heures).
- À partir de quel instant la concentration est-elle inférieure à 1 mg/L ?