

Fonction exponentielle et croissances comparées

Corrigé du contrôle - Terminale

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice interdite.

1 Équations et inéquations / 3 pts

a. (1,5 pt) Avec $X = e^x > 0$: $X^2 - 4X + 3 = 0$, $\Delta = 16 - 12 = 4$, $X = \frac{4-2}{2} = 1$ ou $X = \frac{4+2}{2} = 3$ (1 pt). Donc $x = 0$ ou $x = \ln 3$ (0,5 pt).

b. (1,5 pt) $e^{1-2x} > e^{-3} \Leftrightarrow 1 - 2x > -3$ (croissance de exp, 0,5 pt) $\Leftrightarrow -2x > -4 \Leftrightarrow x < 2$ (inversion du sens, 0,5 pt). $S =]-\infty ; 2[$ (0,5 pt).

2 Dérivées et primitives / 3 pts

a. (1 pt) $u = x^2 - 3x$, $u' = 2x - 3$: $g'(x) = (2x - 3)e^{x^2-3x}$.

b. (1 pt) $h'(x) = e^{2x} + (x + 3) \times 2e^{2x} = (2x + 7)e^{2x}$.

c. (1 pt) Une primitive de k est $2e^{x^2}$ (0,5 pt) ; une primitive de m est $-\frac{1}{3}e^{-3x+1}$ (0,5 pt).

3 Limites / 3 pts

a. (1 pt) $(x^2 - 3x)e^{-x} = x^2 e^{-x} - 3x e^{-x} \rightarrow 0 - 0 = 0$ (croissances comparées).

b. (1 pt) $(2x + 1)e^x = 2x e^x + e^x \rightarrow 0 + 0 = 0$ en $-\infty$.

c. (1 pt) Forme indéterminée. $e^x - x^2 = e^x(1 - x^2/e^x)$. Comme $x^2/e^x \rightarrow 0$, le facteur tend vers 1 et $e^x \rightarrow +\infty$: la limite est $+\infty$.

4 Étude de fonction / 8 pts

a. (1 pt) En $+\infty$: $f(x) = 2x e^{-x} - e^{-x} \rightarrow 0$: asymptote horizontale $y = 0$. En $-\infty$: $2x - 1 \rightarrow -\infty$ et $e^{-x} \rightarrow +\infty$ donc $f \rightarrow -\infty$.

b. (2 pts) $f'(x) = 2e^{-x} - (2x - 1)e^{-x} = (3 - 2x)e^{-x}$ (1 pt). Signe de $3 - 2x$: positif si $x < \frac{3}{2}$. f croît sur $]-\infty ; \frac{3}{2}]$, décroît ensuite ; maximum $f(\frac{3}{2}) = 2e^{-3/2} \approx 0,446$ (1 pt).

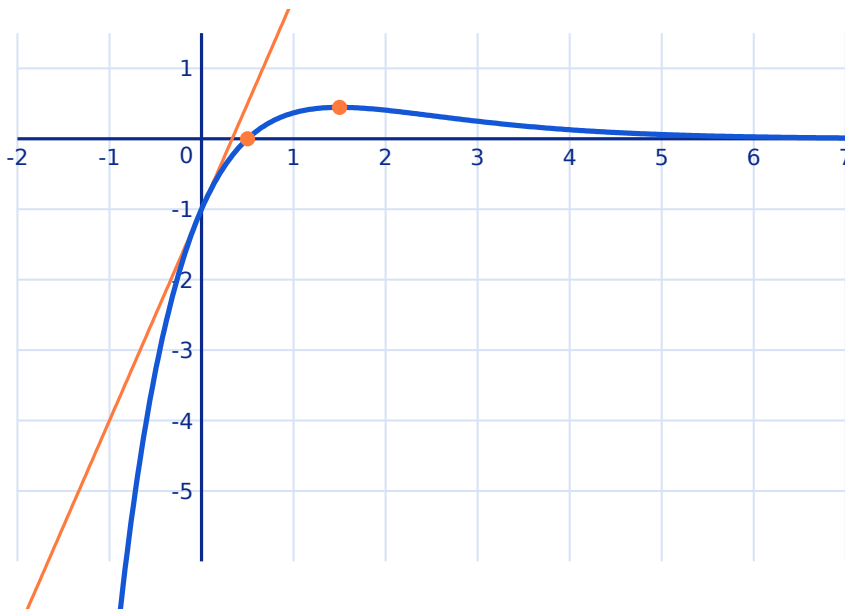
x	$-\infty$	$3/2$	$+\infty$
$f'(x)$		$+ \ 0 \ -$	
f	$-\infty$	$\nearrow 0,446 \searrow$	0

c. (1 pt) $f(0) = -1$ et $f'(0) = 3$. $T : y = 3x - 1$.

d. (1,5 pt) $f''(x) = -2e^{-x} - (3 - 2x)e^{-x} = (2x - 5)e^{-x}$ (0,5 pt). Concave sur $]-\infty ; 5/2]$, convexe sur $[5/2 ; +\infty[$ (0,5 pt). Point d'inflexion d'abscisse **5/2** : $f(5/2) = 4e^{-5/2} \approx 0,328$ (0,5 pt).

e. (0,5 pt) $e^{-x} > 0$, donc $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$.

f. (1 pt) Sur $]-\infty ; 3/2]$, f est continue, strictement croissante de $-\infty$ à 0,446 : elle prend la valeur 0,4 une seule fois (théorème des valeurs intermédiaires, corollaire de la bijection). Sur $[3/2 ; +\infty[$, f est continue, strictement décroissante de 0,446 à 0 : 0,4 $\in]0 ; 0,446[$ est atteinte une seule fois. Au total, 2 solutions.



5 Modélisation : médicament / 3 pts

a. (1 pt) $C(t) = C_0 e^{-0,25t} = 8e^{-0,25t}$.

b. (1 pt) Demi-vie : $e^{-0,25t} = 1/2 \Leftrightarrow t = \ln 2 / 0,25 = 4 \ln 2 \approx 2,77$ h (environ 2 h 46 min).

c. (1 pt) $8e^{-0,25t} < 1 \Leftrightarrow e^{-0,25t} < 1/8 \Leftrightarrow -0,25t < -\ln 8 \Leftrightarrow t > 4 \ln 8 \approx 8,32$. À partir d'environ 8 h 19 min (remarque : $4 \ln 8 = 12 \ln 2$, soit 3 demi-vies, ce qui est cohérent avec $8 \rightarrow 1$).