

Fonction exponentielle et croissances comparées

Corrigé des exercices - Terminale

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Simplifier des écritures ★★★

- a. $A = e^{3+(-5)} = e^{-2}$.
- b. $(e^2)^3 = e^6$, puis $B = e^{6-4} = e^2$.
- c. Au numérateur : $e^{x+1+2x} = e^{3x+1}$. Puis $C = e^{3x+1-x} = e^{2x+1}$.
- d. $(e^{-x})^2 = e^{-2x}$, donc $D = e^{-2x+3x} = e^x$.

2 Vrai ou faux ? ★★★

- a. **Faux.** $e^{a+b} = e^a \times e^b$. Contre-exemple : $a = b = 0$ donne $e^0 = 1$ mais $e^0 + e^0 = 2$.
- b. **Faux.** $e^x > 0$ pour tout x , donc e^x ne peut pas valoir -2 .
- c. **Vrai.** $(e^x)^2 = e^x \times e^x = e^{x+x} = e^{2x}$.
- d. **Faux.** Sa dérivée est $\exp$, strictement positive : elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- e. **Faux.** $e^0 = 1$.

3 Équations élémentaires ★★★

- a. $5 > 0$ donc $x = \ln 5$ ($\approx 1,61$).
- b. $e^{2x} = e^0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- c. $e^{x-3} = e^{2x+1} \Leftrightarrow x - 3 = 2x + 1 \Leftrightarrow x = -4$.
- d. Aucune solution : une exponentielle est strictement positive. $S = \emptyset$.

4 Inéquations élémentaires ★★★

- a. $e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$. $S =]0 ; +\infty[$.
- b. $e = e^1$. $e^{3x-1} \leq e^1 \Leftrightarrow 3x - 1 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}$. $S =]-\infty ; \frac{2}{3}]$.
- c. $e^{-x} < e^2 \Leftrightarrow -x < 2 \Leftrightarrow x > -2$. $S =]-2 ; +\infty[$.

5 Premières dérivées ★★★

On utilise $(e^u)' = u' e^u$.

- a. $f'(x) = 3e^{3x}$.
- b. $u(x) = -x/2$, $u' = -1/2$: $g'(x) = -1/2 e^{-x/2}$.
- c. $u = x^2 + 1$, $u' = 2x$: $h'(x) = 2x e^{x^2+1}$.
- d. $k'(x) = 5 \times 2 e^{2x+1} - 1 = 10e^{2x+1} - 1$.

6 Limites simples ★★★

- a. Quand $x \rightarrow +\infty$, $-x \rightarrow -\infty$, et $e^{-x} \rightarrow 0$.
- b. $e^x \rightarrow 0$ en $-\infty$, donc $3 - e^x \rightarrow 3$.
- c. $e^{-x} \rightarrow 0$ et $x \rightarrow +\infty$, donc la somme tend vers $+\infty$.
- d. $-x \rightarrow +\infty$ donc $e^{-x} \rightarrow +\infty$.

7 Exponentielle et logarithme ★★★

$$A = 5. B = 7. C = e^{\ln 3 \times 2} = (e^{\ln 3})^2 = 3^2 = 9. D = \ln(e^{-3}) = -3. E = e^{-\ln 2} = 1/e^{\ln 2} = 1/2.$$

8 Un tableau de signes ★★★

Pour tout x , $e^x > 0$: le signe de $g(x)$ est celui de $2 - x$.

$2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2$. Donc $g(x) > 0$ sur $] -\infty ; 2[$, $g(2) = 0$ et $g(x) < 0$ sur $]2 ; +\infty[$.

L'ensemble des solutions de $g(x) > 0$ est $] -\infty ; 2[$.

9 Produits et quotients ★★★

- a. Produit uv avec $u = x^2 - x$, $v = e^x$: $f'(x) = (2x - 1)e^x + (x^2 - x)e^x = (x^2 + x - 1)e^x$.
- b. Quotient u/v avec $u = e^x$, $v = e^x + 1$: $g'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$.
- c. $h'(x) = 3e^{-2x} + (3x + 1)(-2)e^{-2x} = (3 - 6x - 2)e^{-2x} = (1 - 6x)e^{-2x}$.

10 Changement de variable ★★★

On pose $X = e^x$ ($X > 0$). L'équation devient $X^2 - 3X + 2 = 0$, de discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$. Les racines sont $X = 3 - 1/2 = 1$ et $X = 3 + 1/2 = 2$, toutes deux strictement positives.

$e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$; $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$. $S = \{0 ; \ln 2\}$.

11 Inéquation du second degré en e^x ★★★

Avec $X = e^x > 0$: $X^2 - X - 6 = (X - 3)(X + 2)$ (vérification : $X^2 + 2X - 3X - 6$).

Comme $X + 2 > 0$, l'inéquation équivaut à $X - 3 > 0$, soit $e^x > 3 \Leftrightarrow x > \ln 3$. $S =]\ln 3 ;$

$+\infty[.$

12 Limites avec croissances comparées ★★★

- a. $x^2 e^{-x} = x^2/e^x \rightarrow 0$ (croissances comparées).
- b. Croissances comparées en $-\infty$: $x e^x \rightarrow 0$.
- c. Forme indéterminée $+\infty - \infty$. On factorise : $x - e^x = e^x(x/e^x - 1)$. Or $x/e^x \rightarrow 0$, donc la parenthèse tend vers -1 et $e^x \rightarrow +\infty$: limite $-\infty$.
- d. $e^{2x} - 1/x = 2 \times e^{2x} - 1/2x$. En posant $h = 2x \rightarrow 0$, $e^h - 1/h \rightarrow 1$. Limite : 2.

13 Une inégalité par l'étude de fonction ★★★

- a. $f'(x) = e^x - 2$. $e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln 2$. Donc $f' < 0$ sur $] -\infty ; \ln 2[$ et $f' > 0$ sur $]\ln 2 ; +\infty[$.
- b. f décroît sur $] -\infty ; \ln 2]$, croît sur $[\ln 2 ; +\infty[$. Minimum : $f(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2 \ln 2 = 2 - 2 \ln 2 \approx 0,61$.
- c. Comme $\ln 2 < 1$, $2 - 2 \ln 2 = 2(1 - \ln 2) > 0$. Le minimum de f est strictement positif, donc $f(x) > 0$, soit $e^x > 2x$ pour tout réel x .

14 Tangentes ★★★

$$f'(x) = e^x + x e^x = (x + 1)e^x.$$

En 0 : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. Tangente : $y = 1 \times (x - 0) + 0$, soit $y = x$.

En 1 : $f(1) = e$ et $f'(1) = 2e$. Tangente : $y = 2e(x - 1) + e = 2ex - e$.

15 Étude de $x \mapsto e^x / x$ ★★★

- a. En 0^+ : $e^x \rightarrow 1$ et $x \rightarrow 0^+$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$. En $+\infty$: croissances comparées, $f(x) \rightarrow +\infty$.
- b. Quotient : $f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$. Le facteur e^x/x^2 est positif : f' a le signe de $x - 1$. f décroît sur $]0 ; 1]$, croît sur $[1 ; +\infty[$, avec $f(1) = e$ (minimum).
- c. Pour $x > 0$, $f(x) \geq e$, soit $e^x/x \geq e$, donc $e^x \geq ex$.

16 Primitives ★★★

- a. $F_1(x) = 1/2 e^{2x+1}$ (car $u' = 2$).
- b. $u' = -1$: $F_2(x) = -e^{-x+3}$.
- c. $(e^{x^2})' = 2x e^{x^2}$, donc $F_3(x) = 2e^{x^2}$ (dérivée : $2 \times 2x e^{x^2}$).
- d. $u = x^2 + 3x$, $u' = 2x + 3$: $F_4(x) = e^{x^2+3x}$.

17 Suite géométrique et exponentielle ★★★

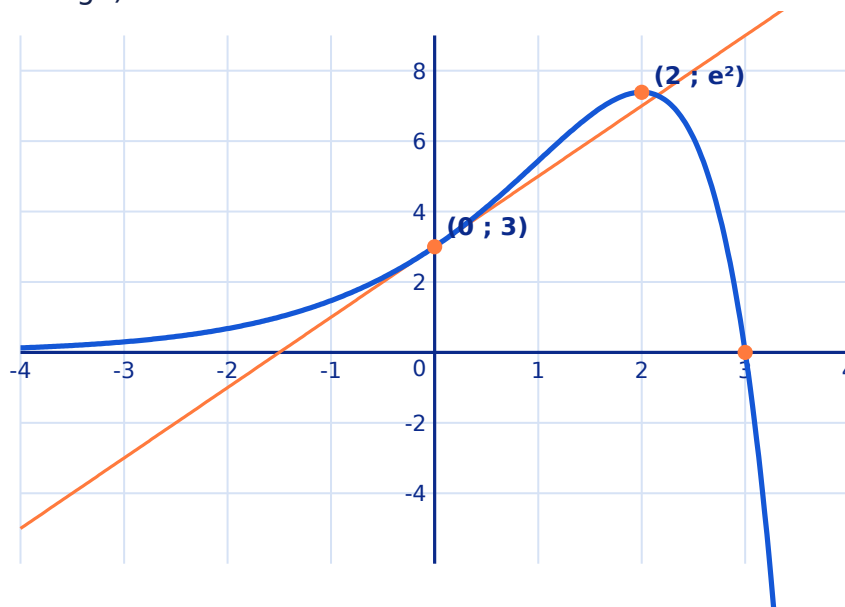
- a. $u_{n+1} = 2e^{-0,5n-0,5} = 2e^{-0,5n} \times e^{-0,5} = e^{-0,5} \times u_n$. Suite géométrique de raison $q = e^{-0,5} \approx 0,607$ et de premier terme $u_0 = 2$.
- b. $0 < q < 1$ donc $u_n \rightarrow 0$.
- c. $u_n < 0,01 \Leftrightarrow e^{-0,5n} < 0,005 \Leftrightarrow -0,5n < \ln 0,005 \Leftrightarrow n > 2 \ln 200 \approx 10,6$. Le plus petit entier est $n = 11$ (contrôle : $u_{10} \approx 0,0135$ et $u_{11} \approx 0,0081$).

18 Problème : étude complète ★★★

- a. En $-\infty$: $f(x) = 3e^x - xe^x \rightarrow 0 - 0 = 0$ (croissances comparées). En $+\infty$: $3 - x \rightarrow -\infty$ et $e^x \rightarrow +\infty$, donc $f(x) \rightarrow -\infty$.
- b. $f'(x) = -e^x + (3 - x)e^x = (2 - x)e^x$. Signe de $2 - x$: positif avant 2. f croît sur $]-\infty ; 2]$, décroît sur $[2 ; +\infty[$; maximum $f(2) = e^2 \approx 7,39$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$		+ 0 -	
f	0	$\nearrow e^2 \searrow$	$-\infty$

- c. $f(0) = 3$ et $f'(0) = 2$. $T : y = 2x + 3$.
- d. $f''(x) = -e^x + (2 - x)e^x = (1 - x)e^x$. Convexe sur $]-\infty ; 1]$, concave sur $[1 ; +\infty[$.
Point d'inflexion : $(1 ; 2e) \approx (1 ; 5,44)$.
- e. e^x ne s'annule pas : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$. Voici la courbe (en bleu) et sa tangente en 0 (en orange).



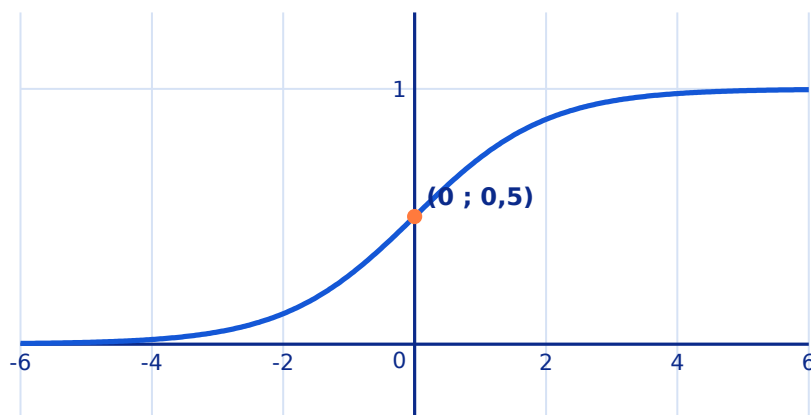
19 Fonction avec paramètre ★★★

- a. $f_a'(x) = e^x - a$, qui s'annule en $x = \ln a$, négative avant, positive après. Minimum : $f_a(\ln a) = e^{\ln a} - a \ln a = a - a \ln a = a(1 - \ln a)$.
- b. L'inégalité équivaut à $f_a(x) \geq 0$ pour tout x , donc à $a(1 - \ln a) \geq 0$. Comme $a > 0$: $1 - \ln a \geq 0 \Leftrightarrow \ln a \leq 1 \Leftrightarrow a \leq e$. Réponse : $0 < a \leq e$.

c. Pour $a = e$ (cas limite), $e^x \geq ex$ pour tout x , avec égalité en $x = \ln e = 1$.

20 Fonction logistique ★★★

- a. $f(0) = \mathbf{1/1+1 = 1/2}$. En $+\infty : e^{-x} \rightarrow 0$ donc $f(x) \rightarrow 1$. En $-\infty : e^{-x} \rightarrow +\infty$ donc $f(x) \rightarrow 0$.
Asymptotes horizontales : $y = 0$ (en $-\infty$) et $y = 1$ (en $+\infty$).
- b. $f = 1/v$ avec $v = 1 + e^{-x}$, $v' = -e^{-x}$, donc $f' = -v'/v^2 = \mathbf{e^{-x}/(1+e^{-x})^2} > 0$. f est strictement croissante de 0 à 1.
- c. $f(-x) = \mathbf{1/1+e^x}$. Or $1 - f(x) = \mathbf{e^{-x}/1+e^{-x} = 1/e^x+1}$ (on multiplie haut et bas par e^x).
Égalité vérifiée. La courbe est symétrique par rapport au point $(0 ; \mathbf{1/2})$.



21 Décroissance radioactive ★★★

- a. Demi-vie : $e^{-5\lambda} = \mathbf{1/2} \Leftrightarrow -5\lambda = -\ln 2 \Leftrightarrow \lambda = \mathbf{\ln 2/5} \approx 0,139 \text{ jour}^{-1}$.
- b. $\mathbf{m(12)/m(0) = e^{-12\lambda} = e^{-2,4 \ln 2} = 2^{-2,4} \approx 0,190}$. Il reste environ 19 % ($\approx 95 \text{ mg}$).
- c. $e^{-\lambda t} = 0,1 \Leftrightarrow \lambda t = \ln 10 \Leftrightarrow t = \mathbf{\ln 10/\lambda = 5 \ln 10/\ln 2} \approx 16,6$. Au bout d'environ 16,6 jours (soit 16 jours et 15 heures).

22 Équations différentielles ★★★

- a. $y(x) = Ce^{-0,5x}$ et $y(0) = C = 8$. Donc $y(x) = 8e^{-0,5x}$ et $y(4) = 8e^{-2} \approx 1,08$.
- b. Ici $a = 2$ et $b = 3$: les solutions sont $Ce^{2x} - \mathbf{3/2}$. $y(0) = 1$ donne $C - \mathbf{3/2} = 1$, soit $C = \mathbf{5/2}$. Solution : $y(x) = \mathbf{5/2 e^{2x} - 3/2}$. Vérification : $y' = 5e^{2x}$ et $2y + 3 = 5e^{2x} - 3 + 3 = 5e^{2x}$. ✓

23 Refroidissement d'un thé ★★★

- a. Posons $y = T - 20 : y' = -0,2y$ avec $y(0) = 70$. Donc $y(t) = 70e^{-0,2t}$ et $T(t) = 20 + 70e^{-0,2t}$.
- b. $T(t) \leq 40 \Leftrightarrow 70e^{-0,2t} \leq 20 \Leftrightarrow e^{-0,2t} \leq \mathbf{2/7} \Leftrightarrow -0,2t \leq \ln(\mathbf{2/7}) \Leftrightarrow t \geq 5 \ln(\mathbf{7/2}) \approx 6,26$.
Soit environ 6 min 16 s.
- c. $e^{-0,2t} \rightarrow 0$ donc $T(t) \rightarrow 20$: le thé finit par atteindre la température de la pièce.

24 Seuil avec un programme ★★★

- a. On continue tant que la condition n'est pas atteinte :

```
from math import exp
n = 1
while n * exp(-n) >= 0.001:
    n = n + 1
print(n)
```

- b. Il affiche 10. En effet $9e^{-9} \approx 0,00111 \geq 0,001$ (la boucle continue) et $10e^{-10} \approx 0,000454 < 0,001$ (la boucle s'arrête).
- c. Par croissances comparées, $ne^{-n} \rightarrow 0$: tôt ou tard le terme passe sous 0,001, donc la boucle se termine.

25 Croissances comparées : preuve ★★★

- a. $g'(x) = e^x - \frac{x^2}{2} \geq 0$ d'après le résultat admis du cours. Donc g est croissante sur $[0 ; +\infty[$.
- b. $g(x) \geq g(0) = 1 > 0$, donc $e^x > \frac{x^3}{6}$ pour tout $x \geq 0$.
- c. Pour $x > 0$, $e^x/x^2 \geq x/6$. Or $x/6 \rightarrow +\infty$ donc, par comparaison, $e^x/x^2 \rightarrow +\infty$.