

Fonction exponentielle et croissances comparées

Cours de maths - Terminale

La fonction exponentielle est la grande nouveauté d'analyse en Terminale. Elle décrit tout ce qui croît ou décroît « proportionnellement à lui-même » : une population de bactéries, un capital placé, la radioactivité, le refroidissement d'un café. Dans ce chapitre, tu vas apprendre à la **manipuler** (algèbre, équations), à la **dériver**, à calculer ses **limites** (c'est là que les croissances comparées entrent en scène) et à l'utiliser pour **modéliser**.

1. Définition et propriétés algébriques

Fonction exponentielle

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. On l'appelle la **fonction exponentielle**, notée $\exp$. Le nombre $\exp(1)$ est noté **e** ($e \approx 2,718\ 28$) et, pour tout réel x , on écrit $\exp(x) = e^x$.

Autrement dit, c'est la fonction qui est **égale à sa propre dérivée** et qui vaut 1 en 0. Son existence est admise ; son unicité et ses propriétés se démontrent à partir de cette seule définition.

Relation fonctionnelle

Pour tous réels a et b et tout entier relatif n :

- $e^0 = 1$ et $e^1 = e$;
- $e^{a+b} = e^a \times e^b$;
- $e^{-a} = 1/e^a$;
- $e^{a-b} = e^a/e^b$;
- $(e^a)^n = e^{na}$.

Démonstration. On pose $h(x) = e^x \times e^{-x}$. Alors $h'(x) = e^x e^{-x} - e^x e^{-x} = 0$, donc h est constante, égale à $h(0) = 1$. Ainsi $e^x \times e^{-x} = 1$: l'exponentielle ne s'annule jamais et $e^{-x} = 1/e^x$.

Pour la somme, on fixe a et on pose $g(x) = e^{a+x} \times e^{-x}$. Alors $g'(x) = e^{a+x} e^{-x} - e^{a+x} e^{-x} = 0$, donc $g(x) = g(0) = e^a$. En multipliant par e^x : $e^{a+x} = e^a e^x$. ■

Signe et comparaison

Pour tout réel x , $e^x > 0$. De plus : $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ et $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$.

Pourquoi $e^x > 0$? Elle ne s'annule jamais (voir plus haut), elle est continue et vaut 1 en 0 : si elle prenait une valeur négative, le théorème des valeurs intermédiaires lui imposerait de s'annuler. Contradiction.

Exemple : simplifier

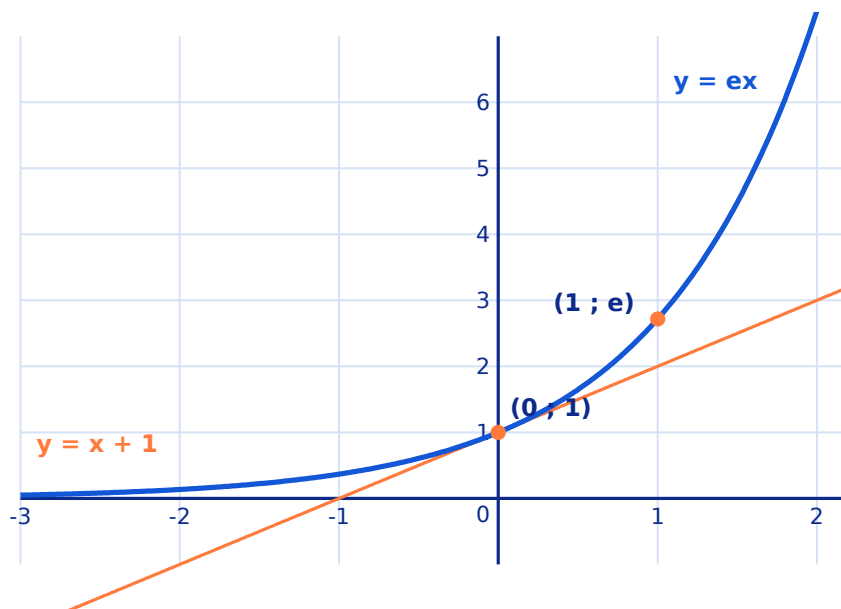
$$A = e^{2x+3} \times e^{x-1} / e^{4x} = e^{3x+2} / e^{4x} = e^{3x+2-4x} = e^{2-x}.$$

Pièges classiques

e^{a+b} n'est **pas** $e^a + e^b$; e^{-x} n'est **pas** $-e^x$ (il est toujours positif) ; $e^{2x} = (e^x)^2$ et non $2e^x$.

2. Variations, courbe et tangente en 0

Comme $\exp' = \exp$ et que $e^x > 0$, la dérivée est strictement positive : **la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$** . Sa courbe passe par $(0 ; 1)$ et $(1 ; e)$. La tangente en 0 a pour équation $y = \exp'(0)(x - 0) + \exp(0)$, soit **$y = x + 1$** .



De plus $\exp'' = \exp > 0$: la fonction est **convexe** sur $\mathbb{R}$, donc sa courbe est située **au-dessus de ses tangentes**. En particulier, avec la tangente en 0 :

Inégalité fondamentale

Pour tout réel x , $e^x \geq x + 1$, avec égalité si et seulement si $x = 0$.

Astuce

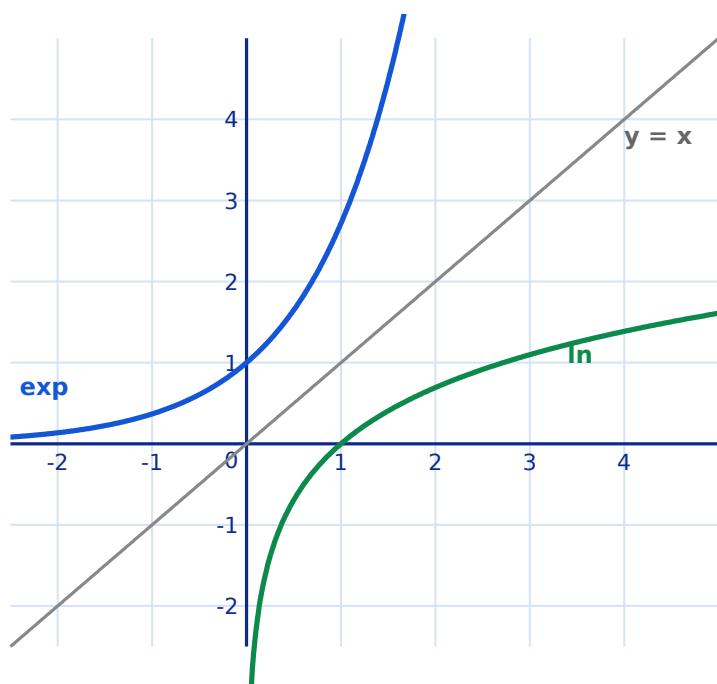
Cette inégalité sert très souvent à **minorer** une expression et à obtenir des limites (partie 5). Retiens-la !

3. Équations, inéquations et lien avec le logarithme

Sur $]0 ; +\infty[$, la fonction $\ln$ est la **fonction réciproque** de $\exp$. Cela donne deux formules à connaître par cœur :

Exponentielle et logarithme

- Pour tout réel x : $\ln(e^x) = x$.
- Pour tout réel $x > 0$: $e^{\ln x} = x$.
- Pour $a > 0$: $e^x = a \Leftrightarrow x = \ln a$. Pour $a \leq 0$, l'équation $e^x = a$ n'a aucune solution.



Les courbes de $\exp$ et de $\ln$ sont **symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$** (la première bissectrice).

Méthode : résoudre une équation ou une inéquation

1. **Isoler** l'exponentielle (ou ramener chaque membre à une exponentielle).
2. Utiliser l'équivalence $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ (ou le logarithme si un membre est un nombre).
3. Pour une inéquation, on peut « passer à l'exponentielle » ou « au logarithme » **sans changer le sens** car $\exp$ et $\ln$ sont croissantes.
4. Si l'équation est de la forme $e^{2x} + be^x + c = 0$, poser $X = e^x$ (avec $X > 0$), résoudre en X , puis revenir à x .

Exemples

(1) $e^{2x-1} = 6 \Leftrightarrow 2x - 1 = \ln 6 \Leftrightarrow x = \mathbf{1 + \ln 6 / 2} \approx 1,40$.

(2) $e^x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq \ln 4$; l'ensemble des solutions est $[\ln 4 ; +\infty[$.

(3) $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$. Avec $X = e^x$: $X^2 - 5X + 6 = 0$, soit $(X - 2)(X - 3) = 0$, donc $X = 2$ ou $X = 3$. Ces deux valeurs sont strictement positives, donc $x = \ln 2$ ou $x = \ln 3$.

4. Dérivée de e^u et primitives

Dérivée de e^u

Si u est dérivable sur un intervalle I , alors la fonction e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = u' \times e^u$.

Démonstration. C'est la dérivée d'une composée : si $f(x) = \exp(u(x))$, alors $f'(x) = u'(x) \times \exp'(u(x)) = u'(x) e^{u(x)}$. ■

Exemples

- $f(x) = e^{-3x+2}$: $f'(x) = -3e^{-3x+2}$.
- $g(x) = e^{x^2}$: $g'(x) = 2x e^{x^2}$.
- $h(x) = (3x + 1)e^{-2x}$ (produit) : $h'(x) = 3e^{-2x} + (3x + 1) \times (-2)e^{-2x} = (1 - 6x)e^{-2x}$.

Cas particulier à retenir : $(e^{kx})' = k e^{kx}$. Autre conséquence : **e^u a les mêmes variations que u** , puisque la dérivée $u' e^u$ a le signe de u' .

Primitives

Une primitive de $u' e^u$ est e^u . En particulier, pour $k \neq 0$, une primitive de e^{kx+b} est $\mathbf{1/k} e^{kx+b}$.

Exemple

Une primitive de $x \mapsto 6x e^{x^2}$ est $x \mapsto 3e^{x^2}$, car $(3e^{x^2})' = 3 \times 2x e^{x^2}$. Une primitive de e^{2x+1} est $\mathbf{1/2} e^{2x+1}$.

5. Limites et croissances comparées

Limites de base

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. La courbe de $\exp$ admet donc l'axe des abscisses pour **asymptote horizontale** en $-\infty$.

Démonstration. Pour tout x , $e^x \geq x + 1$ et $\lim (x + 1) = +\infty$ en $+\infty$, donc $e^x \rightarrow +\infty$ (théorème de comparaison). En $-\infty$, on écrit $e^x = 1/e^{-x}$: quand $x \rightarrow -\infty$, $-x \rightarrow +\infty$, donc $e^{-x} \rightarrow +\infty$ et son inverse tend vers 0. ■

Croissances comparées

Pour tout entier naturel n non nul :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x/x^n = +\infty$, ce qui équivaut à $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$.

On retient : « en $+\infty$, l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x ».

Démonstration pour $n = 1$. Posons $g(x) = e^x - x^2/2$ sur $[0 ; +\infty[$. Alors $g'(x) = e^x - x \geq 1 > 0$ d'après l'inégalité $e^x \geq x + 1$. Donc g est croissante et $g(x) \geq g(0) = 1 > 0$, soit $e^x \geq x^2/2$. On en déduit, pour $x > 0$, $e^x/x \geq x/2 \rightarrow +\infty$. ■

Autre limite à connaître

$\lim_{x \rightarrow 0} e^x - 1/x = 1$. En effet, c'est le nombre dérivé de $\exp$ en 0 : $\exp'(0) = e^0 = 1$.

Méthode : lever une forme indéterminée

1. Repérer la forme indéterminée ($\infty - \infty$, $0 \times \infty$, ∞/∞).
2. **Factoriser** par le terme dominant (en $+\infty$: e^x) ou **reconnaître** un produit $x^n e^{\pm x}$.
3. Appliquer les croissances comparées, puis les opérations sur les limites.

Exemples

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$: on factorise, $e^x - x = e^x(1 - x/e^x)$. Comme $x/e^x \rightarrow 0$, le facteur entre parenthèses tend vers 1, donc la limite est $+\infty$.

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1)e^{-x} = \lim (x^2 e^{-x} + e^{-x}) = 0 + 0 = 0$.

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3x} = 0$, car $3x \rightarrow -\infty$ (limite d'une composée).

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{2x} - 1/x = 2 \times e^{2x} - 1/2x \rightarrow 2 \times 1 = 2$.

6. Étudier une fonction contenant une exponentielle

Méthode : plan d'étude

1. Ensemble de définition, éventuelles limites aux bornes (donc asymptotes).
2. Dérivée : produit, quotient ou e^u . **Factoriser par e^u** , qui est toujours strictement positif : le signe de f' est alors celui du facteur restant.
3. Tableau de variations avec les valeurs aux extremums.
4. Tangente, convexité, équation $f(x) = k$, tracé de la courbe.

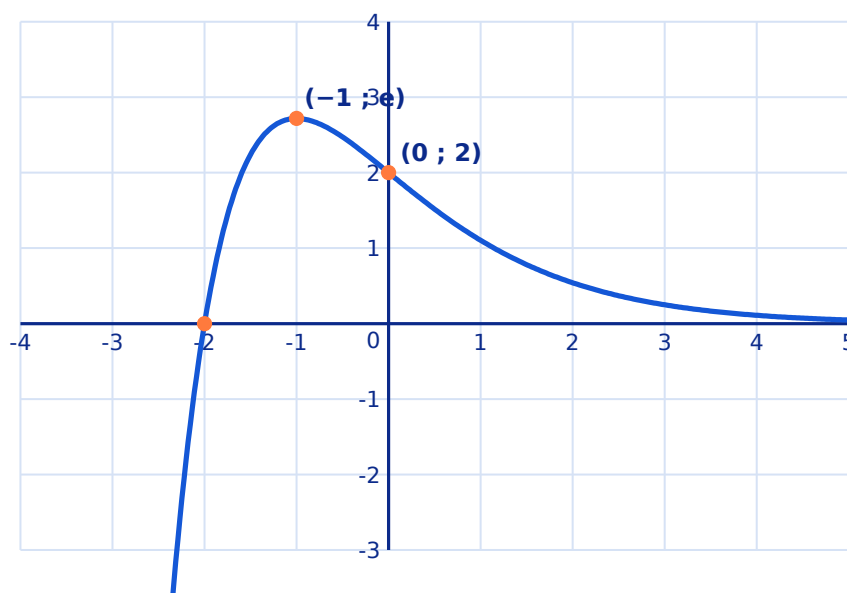
Exemple complet : $f(x) = (x + 2)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

Limites. En $+\infty$: $f(x) = x e^{-x} + 2e^{-x} \rightarrow 0 + 0 = 0$ (croissances comparées). En $-\infty$: $x + 2 \rightarrow -\infty$ et $e^{-x} \rightarrow +\infty$, donc $f(x) \rightarrow -\infty$. La droite $y = 0$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

Dérivée. $f'(x) = e^{-x} + (x + 2) \times (-e^{-x}) = (-x - 1)e^{-x}$. Comme $e^{-x} > 0$, $f'(x)$ a le signe de $-x - 1$: positive si $x < -1$, négative si $x > -1$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$		$+ \ 0 \ -$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow e \searrow$	0

Le maximum vaut $f(-1) = (-1 + 2)e^1 = e \approx 2,72$. La courbe coupe l'axe des abscisses en $x = -2$ (seul zéro, car e^{-x} ne s'annule pas) et l'axe des ordonnées en 2.



7. Dérivée seconde et convexité

Rappel

Si $f'' \geq 0$ sur un intervalle, f est convexe (courbe au-dessus de ses tangentes) ; si $f'' \leq 0$, elle est concave. Un point où f'' s'annule **en changeant de signe** est un point d'inflexion.

Suite de l'exemple précédent

On dérive $f'(x) = (-x - 1)e^{-x}$: $f''(x) = -e^{-x} + (-x - 1)(-e^{-x}) = x e^{-x}$. Son signe est celui de x : f est concave sur $] -\infty ; 0]$ et convexe sur $[0 ; +\infty[$. Le point $(0 ; 2)$ est un **point d'inflexion**, comme on le voit sur la courbe.

Attention

Avec les exponentielles, ne développe pas inutilement : **garde la forme factorisée** de f' et de f'' , c'est elle qui donne le signe.

8. Équations différentielles et modélisation

Équation $y' = ay$

Soit a un réel. Les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$ avec C réel. Pour une condition initiale $y(0) = y_0$, il y a une seule solution : $y(x) = y_0 e^{ax}$.

Démonstration. Soit y une solution et $z(x) = y(x) e^{-ax}$. Alors $z' = y' e^{-ax} - ay e^{-ax} = (y' - ay)e^{-ax} = 0$, donc z est constante, égale à un réel C , et $y = Ce^{ax}$. Réciproquement ces fonctions conviennent. ■

Équation $y' = ay + b$ ($a \neq 0$)

Les solutions sont $x \mapsto Ce^{ax} - \mathbf{b/a}$. La constante $-\mathbf{b/a}$ est la solution « d'équilibre » (constante).

Exemple

$y' = 3y - 6$ avec $y(0) = 5$. Ici $a = 3$ et $b = -6$, donc $-\mathbf{b/a} = 2$ et $y(x) = Ce^{3x} + 2$. La condition $y(0) = 5$ donne $C + 2 = 5$, soit $C = 3$. Solution : $y(x) = 3e^{3x} + 2$.

Modèles usuels.

- **Décroissance radioactive** : le nombre de noyaux vérifie $N' = -\lambda N$ ($\lambda > 0$), donc $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$. La **demi-vie** est le temps $t_{1/2}$ tel que $N(t_{1/2}) = \mathbf{N_0/2}$: $e^{-\lambda t} = \mathbf{1/2} \Leftrightarrow t_{1/2} = \mathbf{\ln 2/\lambda}$.

- **Refroidissement (loi de Newton)** : la température d'un objet dans une pièce à la température T_e vérifie $T' = -k(T - T_e)$, donc $T(t) = T_e + (T_0 - T_e) e^{-kt}$.
- **Croissance exponentielle** ($a > 0$) : population de bactéries, capital à intérêts composés en temps continu.

Exemple : demi-vie

Un échantillon a pour demi-vie 8 jours. Alors $\lambda = \ln 2/8 \approx 0,0866 \text{ jour}^{-1}$. Après 24 jours, il reste $e^{-24\lambda} = e^{-3 \ln 2} = (e^{\ln 2})^{-3} = 2^{-3} = \mathbf{1/8}$ de la quantité initiale, ce qui est cohérent : 24 jours = 3 demi-vies.

À retenir

- exp est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f' = f$ et $f(0) = 1$; $e^x > 0$ pour tout x .
- $e^{a+b} = e^a e^b$, $e^{-a} = 1/e^a$, $(e^a)^n = e^{na}$.
- exp est strictement croissante et convexe ; $e^x \geq x + 1$; tangente en 0 : $y = x + 1$.
- $e^x = a \Leftrightarrow x = \ln a$ ($a > 0$) ; $\ln(e^x) = x$; $e^{\ln x} = x$.
- $(e^u)' = u' e^u$; une primitive de $u' e^u$ est e^u .
- $\lim_{+\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{-\infty} e^x = 0$; croissances comparées : $e^x/x^n \rightarrow +\infty$ en $+\infty$ et $x^n e^x \rightarrow 0$ en $-\infty$.
- Pour étudier une fonction : factoriser par e^u (toujours > 0) pour trouver le signe de la dérivée.
- $y' = ay \Leftrightarrow y = Ce^{ax}$; $y' = ay + b \Leftrightarrow y = Ce^{ax} - b/a$; demi-vie = $\ln 2/\lambda$.