

Fonction exponentielle et croissances comparées

Exercices de maths - Terminale

25 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

1 Simplifier des écritures ★★★

Écris chaque expression sous la forme e^k ou $e^{\text{expression en } x}$:

- a. $A = e^3 \times e^{-5}$
- b. $B = (e^2)^3 / e^4$
- c. $C = e^{x+1} \times e^{2x} / e^x$
- d. $D = (e^{-x})^2 \times e^{3x}$

2 Vrai ou faux ? ★★★

Dis si chaque affirmation est vraie ou fausse et justifie.

- a. Pour tous réels a et b , $e^{a+b} = e^a + e^b$.
- b. L'équation $e^x = -2$ admet une solution.
- c. Pour tout réel x , $(e^x)^2 = e^{2x}$.
- d. La fonction exponentielle est décroissante sur $]-\infty ; 0]$.
- e. $e^0 = 0$.

3 Équations élémentaires ★★★

Résous dans $\mathbb{R}$:

- a. $e^x = 5$
- b. $e^{2x} = 1$
- c. $e^{x-3} = e^{2x+1}$
- d. $e^x = -2$

4 Inéquations élémentaires ★★★

Résous dans $\mathbb{R}$:

- a. $e^x > 1$
- b. $e^{3x-1} \leq e$
- c. $e^{-x} < e^2$

5 Premières dérivées ★★★

Dérive les fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

- a. $f(x) = e^{3x}$
- b. $g(x) = e^{-x/2}$
- c. $h(x) = e^{x^2+1}$
- d. $k(x) = 5e^{2x+1} - x$

6 Limites simples ★★★

Détermine les limites suivantes (justifie en une ligne) :

- a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}$
- b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - e^x)$
- c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + x)$
- d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}$

7 Exponentielle et logarithme ★★★

Calcule sans calculatrice : $A = \ln(e^5)$; $B = e^{\ln 7}$; $C = e^{2 \ln 3}$; $D = \ln(\mathbf{1/e^3})$; $E = e^{-\ln 2}$.

8 Un tableau de signes ★★★

Étudie le signe de $g(x) = (2 - x) e^x$ sur $\mathbb{R}$, puis résous $g(x) > 0$.

9 Produits et quotients ★★★

Dérive et factorise :

- a. $f(x) = (x^2 - x) e^x$
- b. $g(x) = \mathbf{e^x/e^x+1}$
- c. $h(x) = (3x + 1) e^{-2x}$

10 Changement de variable ★★★

Résous dans $\mathbb{R}$: $(e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0$.

11 Inéquation du second degré en e^x ★★★

Résous dans $\mathbb{R}$: $e^{2x} - e^x - 6 > 0$.

12 Limites avec croissances comparées ★★★

Calcule :

- a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x}$
- b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$
- c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x)$
- d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$

13 Une inégalité par l'étude de fonction ★★★

Soit $f(x) = e^x - 2x$ sur $\mathbb{R}$.

- a. Calcule $f'(x)$ et étudie son signe.
- b. Dresse le tableau de variations et calcule le minimum.
- c. En déduire que pour tout x , $e^x > 2x$.

14 Tangentes ★★★

Soit $f(x) = x e^x$. Détermine l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0, puis au point d'abscisse 1.

15 Étude de $x \mapsto e^x / x$ ★★★

Soit $f(x) = \frac{e^x}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$.

- a. Calcule les limites de f en 0 et en $+\infty$.
- b. Montre que $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$ puis dresse le tableau de variations.
- c. En déduire que $e^x \geq ex$ pour tout $x > 0$.

16 Primitives ★★★

Donne une primitive de chaque fonction sur $\mathbb{R}$:

- a. $f_1(x) = e^{2x+1}$
- b. $f_2(x) = e^{-x+3}$
- c. $f_3(x) = 4x e^{x^2}$
- d. $f_4(x) = (2x + 3) e^{x^2+3x}$

17 Suite géométrique et exponentielle ★★★

On pose $u_n = 2e^{-0,5n}$ pour tout entier $n \geq 0$.

- Montre que (u_n) est géométrique. Donne sa raison et son premier terme.
- Quelle est sa limite ?
- Détermine le plus petit entier n tel que $u_n < 0,01$.

18 Problème : étude complète ★★★

Soit $f(x) = (3 - x)e^x$ sur $\mathbb{R}$.

- Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Montre que $f'(x) = (2 - x)e^x$ et dresse le tableau de variations.
- Détermine la tangente T en 0.
- Calcule f'' et étudie la convexité ; donne le point d'inflexion.
- Résous $f(x) = 0$ et trace l'allure de la courbe.

19 Fonction avec paramètre ★★★

Pour $a > 0$, on pose $f_a(x) = e^x - ax$ sur $\mathbb{R}$.

- Étudie les variations de f_a et montre que son minimum est $a - a \ln a$.
- Pour quelles valeurs de $a > 0$ a-t-on $e^x \geq ax$ pour tout réel x ?
- Retrouve ainsi le résultat de l'exercice sur $e^x \geq ex$.

20 Fonction logistique ★★★

Soit $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ sur $\mathbb{R}$.

- Calcule $f(0)$ et les limites en $-\infty$ et $+\infty$. Quelles asymptotes ?
- Montre que $f'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$ et dresse le tableau de variations.
- Montre que $f(-x) = 1 - f(x)$. Que peut-on dire de la courbe ?

21 Décroissance radioactive ★★★

Un échantillon contient 500 mg d'un isotope dont la demi-vie est de 5 jours. La masse restante au bout de t jours est $m(t) = 500 e^{-\lambda t}$.

- Détermine λ (valeur exacte puis arrondie à 10^{-3}).
- Quelle fraction de la masse initiale reste-t-il après 12 jours ?
- Au bout de combien de jours la masse est-elle égale à 10 % de la masse initiale ?

22 Équations différentielles ★★★

Résous :

- a. $y' = -0,5y$ avec $y(0) = 8$. Calcule $y(4)$.
- b. $y' = 2y + 3$ avec $y(0) = 1$.

23 Refroidissement d'un thé ★★★

Un thé à 90 °C est servi dans une pièce à 20 °C. Sa température (en °C) à l'instant t (en minutes) vérifie $T' = -0,2(T - 20)$.

- a. Montre que $T(t) = 20 + 70e^{-0,2t}$.
- b. À partir de quand le thé est-il à 40 °C ou moins ?
- c. Quelle est la limite de T en $+\infty$? Interprète.

24 Seuil avec un programme ★★★

On cherche le plus petit entier n tel que $n e^{-n} < 0,001$.

- a. Complète ce programme Python :

```
from math import exp
n = 1
while ..... :
    n = n + 1
print(n)
```

- b. Quelle valeur affiche-t-il ? Justifie par deux calculs.
- c. Justifie que cet entier existe (limite).

25 Croissances comparées : preuve ★★★

Soit $g(x) = e^x - x^3/6$ sur $[0 ; +\infty[$.

- a. Montre que $e^x \geq x^2/2$ pour $x \geq 0$ (résultat du cours) puis étudie les variations de g .
- b. En déduire $e^x \geq x^3/6$ sur $[0 ; +\infty[$.
- c. Déduis-en $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x/x^2$.