

Fonction exponentielle

Exercices de maths - 1ère

24 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

1 Simplifier des produits et quotients ★★★

Écris chaque expression sous la forme $e^{\dots}$ (un seul exposant).

- a. $e^3 \times e^{-5}$
- b. $(e^2)^3$
- c. e^7 / e^4
- d. $1 / e^{-2}$
- e. $e^x \times e^{2x}$
- f. $(e^{-x})^2 \times e^x$
- g. $e^{x+1} \times e^{1-x}$

2 Vrai ou faux ? (justifie) ★★★

Dis si chaque affirmation est vraie ou fausse, et justifie.

- a. $e^0 = 1$.
- b. Pour tous réels a et b, $e^{a+b} = e^a + e^b$.
- c. Il existe un réel x tel que $e^x = -3$.
- d. $(e^x)^2 = e^{2x}$ pour tout x.
- e. La fonction exponentielle est décroissante sur $]-\infty ; 0]$.
- f. $e^{-3} < e^{-2}$.
- g. Pour tout réel x, $e^x \geq x + 1$.

3 Valeurs approchées à la calculatrice ★★★

Donne une valeur approchée à 10^{-3} près de chaque nombre : a) $e^{1,5}$; b) $e^{-0,3}$; c) $e^{2,5}$; d) $e^{-1,2}$; e) $e^{0,1}$. Range ensuite ces cinq nombres dans l'ordre croissant **sans nouveau calcul**.

4 Équations avec des exponentielles ★★★

Résous dans $\mathbb{R}$: a) $e^{2x} = e^5$; b) $e^{3x-1} = 1$; c) $e^{x^2} = e^{4x-3}$; d) $e^x = -2$; e) $e^{2x+1} = e$.

5 Inéquations avec des exponentielles ★★★

Résous dans $\mathbb{R}$: a) $e^x < e^{-2}$; b) $e^{-x+1} \geq e^{3x}$; c) $e^{2x-3} > 1$; d) $e^x + 1 > 0$.

6 Dériver des fonctions avec e^{ax+b} ★★★

Calcule la dérivée de chaque fonction sur $\mathbb{R}$.

- a. $f(x) = e^{3x}$
- b. $f(x) = e^{-2x+1}$
- c. $f(x) = 5e^{-0,4x}$
- d. $f(x) = e^{x/2}$
- e. $f(x) = 4x - e^{2x}$
- f. $f(x) = e^x + x^2$

7 Étudier un signe ★★★

Étudie le signe de chaque expression pour x réel.

- a. $(x - 3)e^x$
- b. $-4e^{-x}$
- c. $(2 - x)(e^x + 1)$
- d. $(x^2 + 1)e^{-2x}$

8 Développer et réduire ★★★

Développe puis réduis : a) $(e^x + 1)(e^x - 1)$; b) $(e^x + 2)^2$; c) $e^x(e^{-x} + e^{2x})$; d) $(e^{2x})^2 / e^{3x}$.

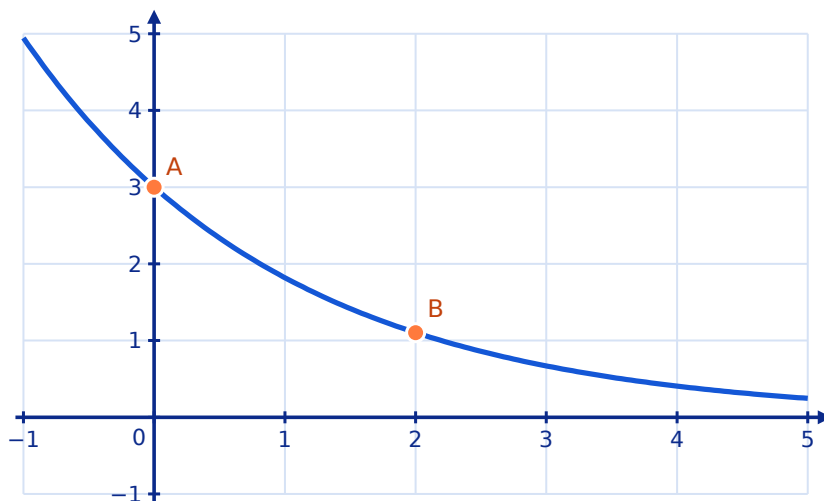
9 Tangentes à des courbes exponentielles ★★★

Détermine l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse indiquée.

- a. $f(x) = e^{2x}$ en $x = 0$
- b. $f(x) = e^x$ en $x = 1$
- c. $f(x) = e^{2x-1}$ en $x = 1/2$

10 Retrouver les paramètres sur une courbe ★★★

La courbe ci-dessous représente une fonction f définie par $f(x) = A e^{kx}$. Elle passe par $A(0 ; 3)$ et par le point B d'abscisse 2 et d'ordonnée $3/e$ (environ 1,1).



- Détermine le réel A.
- Détermine le réel k. La fonction f est-elle croissante ou décroissante ?
- Donne l'équation de la tangente en A.
- Calcule $f(4)$ à 10^{-3} près.

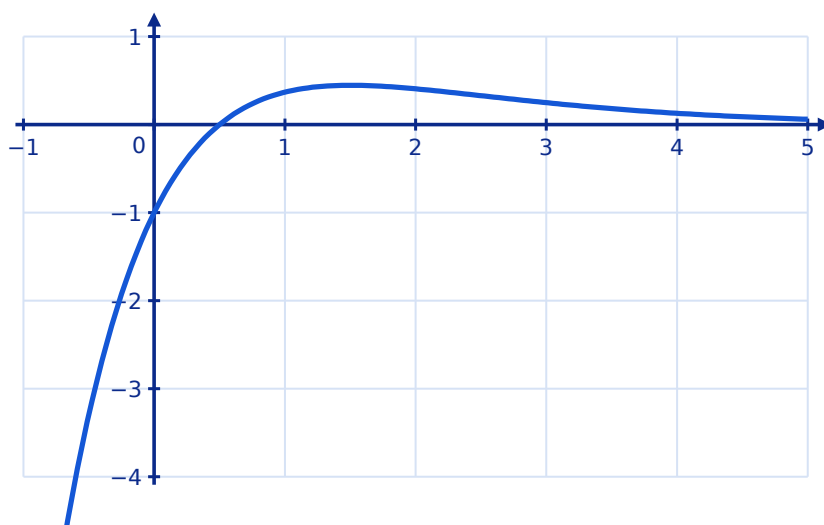
11 Étude de $f(x) = (x + 1)e^x$ ★★★

Soit $f(x) = (x + 1)e^x$ sur $\mathbb{R}$.

- Montre que $f'(x) = (x + 2)e^x$.
- Étudie le signe de f' et dresse le tableau de variations de f.
- Donne le minimum de f (valeur exacte puis arrondie à 10^{-3}).
- Résous $f(x) = 0$.

12 Étude de $f(x) = (2x - 1)e^{-x}$ ★★★

Soit $f(x) = (2x - 1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$; sa courbe est tracée ci-dessous.



- Calcule $f'(x)$ et montre que $f'(x) = (3 - 2x)e^{-x}$.

- b. Dresse le tableau de variations de f .
- c. Donne le maximum de f (valeur exacte et arrondie à 10^{-3}).
- d. Résous $f(x) \geq 0$.

13 Équations à factoriser ★★★

Résous dans $\mathbb{R}$: a) $(x - 1)e^x = 0$; b) $e^{2x} - e^x = 0$; c) $x e^x + e^x = 0$; d) $e^{2x} = e^{x+3}$; e) $(e^x + 1)(x - 4) = 0$.

14 Démontrer des identités ★★★

Démontre que, pour tout réel x :

- a. $(e^x - e^{-x})^2 + 4 = (e^x + e^{-x})^2$;
- b. $e^x / (1 + e^x) = 1 / (1 + e^{-x})$;
- c. $(e^x - 1) / (e^x + 1) = (1 - e^{-x}) / (1 + e^{-x})$.

15 Une suite géométrique en disguise ★★★

On définit $u_n = 3e^{-0,2n}$ pour tout entier $n \geq 0$.

- a. Montre que (u_n) est géométrique. Donne sa raison (arrondie à 10^{-3}) et son premier terme.
- b. Quel est son sens de variation ?
- c. Calcule u_5 à 10^{-3} près.
- d. À l'aide de la calculatrice, trouve le plus petit entier n tel que $u_n < 0,1$.

16 Culture de bactéries ★★★

Le nombre de bactéries dans une culture est modélisé par $N(t) = 500e^{0,3t}$, où t est le temps en heures depuis le début de l'expérience.

- a. Quel est le nombre initial de bactéries ?
- b. Calcule $N(3)$ à l'unité près.
- c. Calcule $N'(t)$ et interprète $N'(0)$.
- d. Au bout de combien d'heures entières le nombre de bactéries dépasse-t-il 10 000 ?

17 Désintégration d'un échantillon ★★★

La masse (en g) d'un échantillon radioactif, au bout de t jours, est $m(t) = 80e^{-0,05t}$.

- a. Donne la masse initiale puis le sens de variation de m .

- b. Calcule $m(10)$ à 10^{-2} g près.
- c. La « demi-vie » est le temps au bout duquel la masse est divisée par 2. Détermine, à la calculatrice, le premier nombre entier de jours t pour lequel $m(t) < 40$.

18 Déterminer $f(x) = A e^{kx}$ avec deux conditions ★★★

Une fonction f est de la forme $f(x) = A e^{kx}$. On sait que $f(0) = 5$ et que le nombre dérivé $f'(0) = -2$.

- a. Détermine A puis k .
- b. Donne l'équation de la tangente à la courbe en $x = 0$.
- c. Calcule $f(5)$ à 10^{-3} près.

19 Conséquences de l'inégalité $e^x \geq x + 1$ ★★★

On admet que pour tout réel x , $e^x \geq x + 1$.

- a. Montre que $e^{-x} \geq 1 - x$ pour tout x .
- b. En déduire que pour tout $x < 1$, $e^x \leq \frac{1}{1-x}$.
- c. Soit n un entier non nul. En appliquant l'inégalité à $x = 1/n$, montre que $(1 + \frac{1}{n})^n \leq e$. Vérifie avec $n = 10$.
- d. Pour $n \geq 2$, montre de même que $(1 - \frac{1}{n})^n \leq e^{-1}$. Vérifie avec $n = 10$.

20 Les solutions de $f' = f$ ★★★

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$. On pose $\varphi(x) = f(x) e^{-x}$.

- a. Calcule $\varphi'(x)$ et montre que φ est constante.
- b. En déduire que $f(x) = f(0) e^x$ pour tout x .
- c. Trouve la fonction f telle que $f' = f$ et $f(0) = -2$.
- d. Trouve la fonction g telle que $g' = g$ et $g(1) = e^2$.

21 Une fonction avec un quotient ★★★

Soit $f(x) = (e^x - 2) / (e^x + 1)$ sur $\mathbb{R}$.

- a. Montre que $f'(x) = 3e^x / (e^x + 1)^2$.
- b. Dresse le tableau de variations de f (sans valeurs aux bornes infinies).
- c. Montre que $f(x) = 1 - 3 / (e^x + 1)$.
- d. Écris l'équation de la tangente en $x = 0$.

22 Fonction « sinus hyperbolique » ★★★

Soit $f(x) = (e^x - e^{-x}) / 2$ pour x réel.

- Montre que $f(-x) = -f(x)$ pour tout x . Que dire de la courbe ?
- Calcule $f'(x)$ et déduis le sens de variation de f .
- Résous $f(x) = 0$, puis étudie le signe de $f(x)$.
- Montre que $e^x + e^{-x} \geq 2$ pour tout x (indice : développe $(e^{x/2} - e^{-x/2})^2$).

23 Étude de $f(x) = (x^2 + x)e^{-x}$ ★★★

Soit $f(x) = (x^2 + x)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

- Montre que $f'(x) = (-x^2 + x + 1)e^{-x}$.
- Résous $-x^2 + x + 1 = 0$ et étudie le signe de f' .
- Dresse le tableau de variations de f et donne ses extremums locaux (arrondis à 10^{-3}).

24 Refroidissement d'une boisson ★★★

Une boisson est servie à 80°C dans une pièce à 20°C . Sa température (en $^\circ\text{C}$) au bout de t minutes est $T(t) = 20 + 60e^{-0,1t}$.

- Calcule $T(0)$ et $T(10)$ (à 10^{-1} près).
- Calcule $T'(t)$. Que peut-on dire des variations de T ? Quelle est la vitesse de refroidissement à $t = 0$?
- Justifie que $T(t) > 20$ pour tout t .
- Au bout de combien de minutes entières la boisson est-elle sous 30°C ?