

Fonction logarithme népérien

Corrigé du contrôle - Terminale

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice interdite.

1 Calculs avec $\ln$ / 3 pts

- $A = 5 + \ln(e^{-2}) = 5 - 2 = 3$. (0,75 pt)
- $40 = 2^3 \times 5$ donc $\ln 40 = 3a + c$. (0,75 pt)
- $\frac{25}{8} = \frac{5^2}{2^3}$ donc $\ln(\frac{25}{8}) = 2c - 3a$. (0,75 pt)
- $0,4 = \frac{2}{5}$ donc $\ln 0,4 = \ln 2 - \ln 5 = a - c$. (0,75 pt)

2 Équations et inéquation / 3 pts

- Domaine : $x > -\frac{1}{2}$. $2x + 1 = x + 4 \Leftrightarrow x = 3$, qui est dans le domaine. $S = \{3\}$. (0,75 pt)
- Domaine : $x > 0$. $\ln(x(x+1)) = \ln 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$ ($\Delta = 25$), racines 2 et -3. Seul 2 est dans le domaine : $S = \{2\}$. (1,25 pt)
- Domaine : $x < 3$. $\ln(3-x) \geq 0 \Leftrightarrow 3-x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq 2$. Avec le domaine : $S =]-\infty ; 2]$. (1 pt)

3 Seuils / 3 pts

- $5\,000 \times 1,03^n > 7\,000 \Leftrightarrow 1,03^n > 1,4 \Leftrightarrow n > \ln 1,4 / \ln 1,03 \approx 11,38$. Il faut $n = 12$ ans ($1,03^{11} \approx 1,384 < 1,4 < 1,03^{12} \approx 1,426$). (1,5 pt)
- $0,9^n < 0,05 \Leftrightarrow n \ln 0,9 < \ln 0,05 \Leftrightarrow n > \ln 0,05 / \ln 0,9 \approx 28,4$ (on divise par $\ln 0,9 < 0$, le sens s'inverse). Il faut $n = 29$ ans. (1,5 pt)

4 Limites / 4 pts

- $x - 3 \ln x = x(1 - 3 \ln x/x)$; $\ln x/x \rightarrow 0$ donc le facteur $\rightarrow 1$ et $x \rightarrow +\infty$: limite $+\infty$. (1 pt)
- $\ln x/x+1 = \ln x/x \times x/x+1 \rightarrow 0 \times 1 = 0$. (1 pt)
- En 0^+ : $1 + \ln x \rightarrow -\infty$ et le dénominateur $x \rightarrow 0^+$: le quotient tend vers $-\infty$. (1 pt)
- $\ln(x^2 + 1) - \ln x = \ln(x^2+1/x) = \ln(x + 1/x)$. Comme $x + 1/x \rightarrow +\infty$, la limite est $+\infty$. (1 pt)

5 Étude de $x \ln x - 2x$ / 5 pts

- $f'(x) = \ln x + 1 - 2 = \ln x - 1$. $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$. $f(e) = e \times 1 - 2e =$

−e.

x	0		e		+∞
f'(x)		−	0	+	
f(x)	0 (limite)	↘	−e	↗	+∞

(2 pts : dérivée 1, signe et tableau 1)

- b. En 0^+ : $x \ln x \rightarrow 0$ (croissance comparée) et $-2x \rightarrow 0$, donc $f(x) \rightarrow 0$. En $+\infty$: $f(x) = x(\ln x - 2)$ avec $\ln x - 2 \rightarrow +\infty$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$. (1 pt)
- c. $f(x) = x(\ln x - 2) = 0$ avec $x > 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$. $S = \{e^2\}$. (1 pt)
- d. $f(1) = 0 - 2 = -2$ et $f'(1) = \ln 1 - 1 = -1$. Tangente : $y = -1 \times (x - 1) - 2 = -x - 1$. (1 pt)

6 Une fonction $\ln(u)$ / 2 pts

- a. $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ donc g est définie sur $\mathbb{R}$. $g'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, du signe de x : g décroît sur $]-\infty ; 0]$, croît sur $[0 ; +\infty[$, avec $g(0) = \ln 1 = 0$ (minimum). (1 pt)
- b. $x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 2$. $S = \{-2 ; 2\}$. (1 pt)