

Fonction logarithme népérien

Corrigé des exercices - Terminale

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Valeurs simples ★★★

- $\ln(e^4) = 4$ (car $\ln(e^x) = x$).
- $\ln 1 = 0$ (car $e^0 = 1$).
- $1/e = e^{-1}$, donc $\ln(1/e) = -1$.
- $\sqrt{e} = e^{1/2}$, donc $\ln \sqrt{e} = 1/2$.
- $e^{\ln 7} = 7$ (car $7 > 0$).
- $e^{2 \ln 3} = e^{\ln 9} = 9$, car $2 \ln 3 = \ln(3^2) = \ln 9$.
- $\ln(e^{-3}) = -3$.

2 Équations $\ln x = k$ ★★★

- Domaine : $x > 0$. $\ln x = 3 \Leftrightarrow x = e^3$. $S = \{e^3\}$.
- Domaine : $x > 0$. $\ln x = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2} = 1/e^2$. $S = \{e^{-2}\}$.
- Domaine : $2x - 1 > 0$, soit $x > 1/2$. $\ln(2x - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 1$, et $1 > 1/2$. $S = \{1\}$.
- Domaine : $x > -4$. $\ln(x + 4) = 1 \Leftrightarrow x + 4 = e \Leftrightarrow x = e - 4 \approx -1,28$, et $e - 4 > -4$. $S = \{e - 4\}$.

3 Exprimer avec $\ln 2$ et $\ln 3$ ★★★

- $6 = 2 \times 3$ donc $\ln 6 = a + b$.
- $12 = 2^2 \times 3$ donc $\ln 12 = 2a + b$.
- $8 = 2^3$ donc $\ln 8 = 3a$.
- $\ln(2/3) = \ln 2 - \ln 3 = a - b$.
- $18 = 2 \times 3^2$ donc $\ln 18 = a + 2b$.
- $24 = 2^3 \times 3$ donc $\ln \sqrt{24} = 1/2 \ln 24 = 1/2(3a + b) = 3a + b/2$.
- $72 = 2^3 \times 3^2$, donc $\ln(1/72) = -\ln 72 = -(3a + 2b) = -3a - 2b$.

4 Vrai ou faux ? ★★★

- Faux.** $\ln(3 + 5) = \ln 8 \approx 2,08$ alors que $\ln 3 + \ln 5 = \ln 15 \approx 2,71$. Le $\ln$ transforme les produits en sommes, pas les sommes.
- Faux.** Pour $x = -1$, $\ln(x^2) = \ln 1 = 0$ mais $\ln x = \ln(-1)$ n'existe pas. L'égalité

n'est valable que pour $x > 0$ (sinon, $\ln(x^2) = 2 \ln|x|$).

c. **Vrai.** $\ln(1/5) = \ln 1 - \ln 5 = -\ln 5$.

d. **Vrai.** $\ln x = -5 \Leftrightarrow x = e^{-5} \approx 0,0067$, qui est bien > 0 .

e. **Faux en général.** Elle n'a de sens que si $0 < a < b$. Par exemple pour $a = -2$ et $b = 1$, $\ln a$ n'existe pas. Pour $0 < a < b$ elle est vraie, car $\ln$ est strictement croissante.

5 Ensembles de définition ★★★

a. $3x - 6 > 0 \Leftrightarrow x > 2$. $D_f =]2 ; +\infty[$.

b. $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3) > 0$: trinôme positif à l'extérieur des racines -3 et 3 . $D_g =]-\infty ; -3[\cup]3 ; +\infty[$.

c. Il faut $x+1/x-4 > 0$ avec $x \neq 4$: tableau de signes, le quotient est positif quand $x + 1$ et $x - 4$ ont le même signe, soit $x < -1$ ou $x > 4$. $D_h =]-\infty ; -1[\cup]4 ; +\infty[$.

d. $4 - x^2 = (2 - x)(2 + x) > 0$: trinôme positif entre ses racines -2 et 2 . $D_k =]-2 ; 2[$.

6 Simplifier des sommes de $\ln$ ★★★

a. $A = \ln(5 \times 4/10) = \ln 2$.

b. $B = \ln(2^3) + \ln 5 - \ln 40 = \ln(8 \times 5/40) = \ln 1 = 0$.

c. $C = \ln 18 - \ln 9 + \ln 4 = \ln(18 \times 4/9) = \ln 8 = 3 \ln 2$.

d. $D : 125 = 5^3$ donc $\ln 125 = 3 \ln 5$; ainsi $D = 3 \ln 5 - 3 \ln 5 + 2 = 2$.

7 Lecture graphique ★★★

a. $\ln 2 \approx 0,7$ et $\ln 5 \approx 1,6$ (valeurs exactes : $0,693\dots$ et $1,609\dots$).

b. On cherche l'abscisse du point d'ordonnée -1 : $x \approx 0,4$. Valeur exacte : $e^{-1} \approx 0,37$.

c. Abscisse du point d'ordonnée $1,5$: $x \approx 4,5$. Valeur exacte : $e^{1,5} \approx 4,48$.

d. La courbe est au-dessus de la droite $y = 1$ à partir de l'abscisse $e \approx 2,7$: l'ensemble est $[e ; +\infty[$.

8 Équations avec $\ln$ ★★★

a. Domaine : $x > 3$ et $x > 5$, donc $x > 5$. L'équation équivaut à $x - 3 = 2x - 10$, soit $x = 7$, et $7 > 5$. $S = \{7\}$.

b. Domaine : $x > 0$ et $x > 2$, donc $x > 2$. L'équation s'écrit $\ln(x(x - 2)) = \ln 3$, soit $x^2 - 2x - 3 = 0$, de racines 3 et -1 ($\Delta = 16$). Seul 3 est dans le domaine. $S = \{3\}$.

c. Domaine : $x > 0$ (et $3x + 4 > 0$ est alors vrai). $2 \ln x = \ln(x^2)$, donc $x^2 = 3x + 4$, soit $x^2 - 3x - 4 = 0$, de racines 4 et -1 ($\Delta = 25$). Seul 4 convient. $S = \{4\}$.

d. Domaine : $x^2 - 1 > 0$, soit $x < -1$ ou $x > 1$. L'équation équivaut à $x^2 - 1 = 8$, soit $x^2 = 9$, donc $x = 3$ ou $x = -3$. Les deux sont dans le domaine. $S = \{-3 ; 3\}$.

9 Changement d'inconnue ★★★

- a. Domaine : $x > 0$. Avec $X = \ln x$: $X^2 - 3X + 2 = 0$, de racines $X = 1$ et $X = 2$. Donc $\ln x = 1$ ou $\ln x = 2$, soit $x = e$ ou $x = e^2$. $S = \{e ; e^2\}$.
- b. Domaine : $x > 0$. $2X^2 + X - 1 = 0$: $\Delta = 1 + 8 = 9$, $X = \frac{-1 \pm 3}{4} = \frac{1}{2}$ ou $X = -1$. Donc $x = e^{1/2} = \sqrt{e}$ ou $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$. $S = \{\sqrt{e} ; \frac{1}{e}\}$.

10 Inéquations avec ln ★★★

- a. Domaine : $x > \frac{1}{2}$. $\ln(2x - 1) > 1 \Leftrightarrow 2x - 1 > e \Leftrightarrow x > \frac{e+1}{2} \approx 1,86$. Comme $\frac{e+1}{2} > \frac{1}{2}$, $S =]\frac{e+1}{2} ; +\infty[$.
- b. Domaine : $x > -3$ et $x < 5$, soit $] -3 ; 5[$. Par croissance de $\ln$: $x + 3 \leq 5 - x \Leftrightarrow x \leq 1$. $S =] -3 ; 1]$.
- c. Domaine : $x > 0$. $\ln x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq e^{-2}$. $S = [e^{-2} ; +\infty[$ ($e^{-2} \approx 0,135$).
- d. Domaine : $x^2 > 4$. $\ln(x^2 - 4) < 0 \Leftrightarrow 0 < x^2 - 4 < 1 \Leftrightarrow 4 < x^2 < 5 \Leftrightarrow 2 < |x| < \sqrt{5}$. $S =]-\sqrt{5} ; -2[\cup]2 ; \sqrt{5}[$.

11 Inconnue en exposant ★★★

- a. On applique $\ln$ (les deux membres sont > 0) : $2x = \ln 7$, $x = \ln \frac{7}{2} \approx 0,97$.
- b. $3e^x = 12$, $e^x = 4$, $x = \ln 4 = 2 \ln 2 \approx 1,39$.
- c. On pose $X = e^x > 0$: $X^2 - 5X + 6 = 0$, de racines 2 et 3 ($\Delta = 1$). Donc $e^x = 2$ ou $e^x = 3$, soit $x = \ln 2$ ou $x = \ln 3$. $S = \{\ln 2 ; \ln 3\} \approx \{0,69 ; 1,10\}$.
- d. $e^{-x+1} < 2 \Leftrightarrow -x + 1 < \ln 2$ ($\ln$ est croissante) $\Leftrightarrow x > 1 - \ln 2 \approx 0,31$. $S =]1 - \ln 2 ; +\infty[$.

12 Seuils ★★★

- a. $1\,000 \times 1,05^n > 2\,000 \Leftrightarrow 1,05^n > 2 \Leftrightarrow n \ln 1,05 > \ln 2 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 2}{\ln 1,05} \approx 14,2$. Le plus petit entier est **$n = 15$** ($1,05^{14} \approx 1,98$ et $1,05^{15} \approx 2,08$).
- b. La masse est multipliée par 0,8 chaque heure : on cherche $0,8^n < 0,01$. Comme $\ln 0,8 < 0$, $n > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,8} \approx 20,6$ (le sens s'inverse en divisant par un nombre négatif). Il faut **21 heures**.
- c. $n \ln 3 > 6 \ln 10 \Leftrightarrow n > \frac{6 \ln 10}{\ln 3} \approx 12,58$. Le plus petit entier est **13** ($3^{12} = 531\,441 < 10^6 < 3^{13} = 1\,594\,323$).

13 Dérivées ★★★

- a. $f'(x) = (1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}) - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$.
- b. $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ (le numérateur vaut $\frac{1}{x} \times x - \ln x = 1 - \ln x$).
- c. $h'(x) = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$.
- d. $k'(x) = \frac{3}{3x+1}$ (forme $\frac{u'}{u}$ avec $u = 3x + 1$).
- e. $p'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = \frac{2 \ln x}{x}$ (forme $2v'v$ avec $v = \ln x$).

14 Limites ★★★

- $\ln x/x^2 = \ln x/x \times 1/x \rightarrow 0 \times 0 = 0$ (croissance comparée).
- $x^2 \ln x = x \times (x \ln x) \rightarrow 0 \times 0 = 0$.
- $2 \ln x - x = x(2 \times \ln x/x - 1)$. Le facteur entre parenthèses tend vers -1 et $x \rightarrow +\infty$, donc la limite est $-\infty$.
- $1/x + \ln x = 1/x(1 + x \ln x)$. Quand $x \rightarrow 0^+$, $x \ln x \rightarrow 0$ donc le facteur tend vers 1 , et $1/x \rightarrow +\infty$: la limite est $+\infty$.
- $\ln(x+1)/x = \ln(x+1)/(x+1) \times (x+1)/x$. Avec $t = x + 1 \rightarrow +\infty$, $\ln t/t \rightarrow 0$ et $(x+1)/x = 1 + 1/x \rightarrow 1$: la limite est 0 .

15 Étude de $x - 2 \ln x$ ★★★

- $f'(x) = 1 - 2/x = x-2/x$. Comme $x > 0$, $f'(x)$ a le signe de $x - 2$: négative sur $]0 ; 2[$, positive sur $]2 ; +\infty[$.
- En 0^+ : $\ln x \rightarrow -\infty$ donc $-2 \ln x \rightarrow +\infty$ et $f(x) \rightarrow +\infty$. En $+\infty$: $f(x) = x(1 - 2 \times \ln x/x)$ et $\ln x/x \rightarrow 0$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$.
- Minimum : $f(2) = 2 - 2 \ln 2 \approx 0,61$.

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$2 - 2 \ln 2$	↗	$+\infty$

Le minimum de f est $2 - 2 \ln 2 = 2(1 - \ln 2) > 0$ car $\ln 2 < 1$ ($2 < e$). Donc $f(x) \geq 2(1 - \ln 2) > 0$ pour tout $x > 0$.

16 Tangentes ★★★

- $\ln e = 1$ et $\ln'(e) = 1/e$: $y = 1 + 1/e(x - e) = 1/ex$. La tangente passe par l'origine (le terme constant vaut $1 - 1 = 0$).
- $f(x) = x \ln x$, $f'(x) = \ln x + 1$. $f(1) = 0$ et $f'(1) = 1$, donc $y = x - 1$.
- $g(x) = \ln(2x)$, $g'(x) = 2/2x = 1/x$. $g(1/2) = \ln 1 = 0$ et $g'(1/2) = 2$, donc $y = 2(x - 1/2) = 2x - 1$.

17 Primitives et intégrales ★★★

- $F(x) = \ln x + x^2$.
- Le discriminant de $x^2 + x + 1$ est $1 - 4 = -3 < 0$: ce trinôme est toujours > 0 . Comme $(x^2 + x + 1)' = 2x + 1$, g est de la forme u'/u et $G(x) = \ln(x^2 + x + 1)$.
- $h(x) = 1/3 \times 3/3x+2$, donc $H(x) = 1/3 \ln(3x + 2)$ ($3x + 2 > 0$ sur l'intervalle).
- Primitive : $\ln(x^2 + 1)$. Intégrale : $\ln(1^2 + 1) - \ln(0^2 + 1) = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \approx 0,69$.

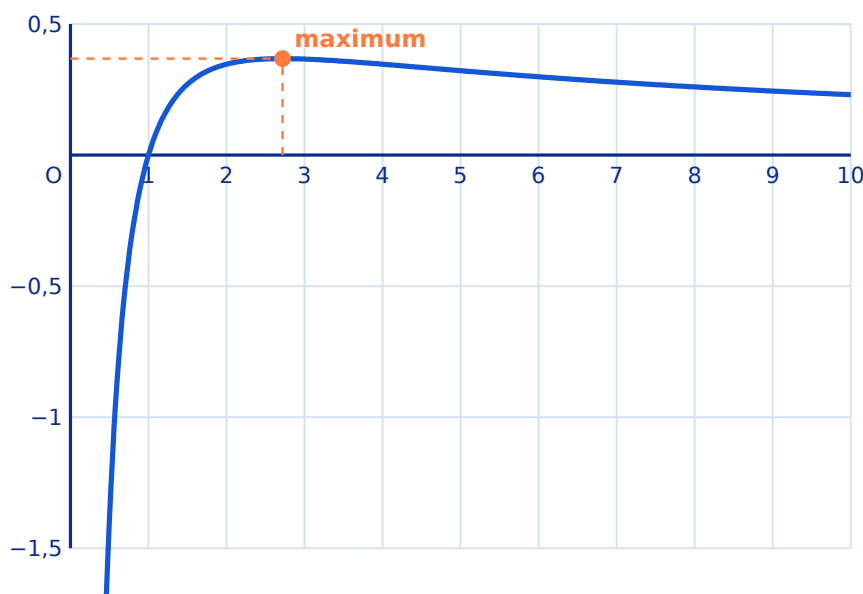
18 Étude de $\ln x / x$ ★★★

- a. En 0^+ : $\ln x \rightarrow -\infty$ et $1/x \rightarrow +\infty$, donc $f(x) \rightarrow -\infty$: asymptote verticale $x = 0$. En $+\infty$: $\ln x/x \rightarrow 0$ (croissance comparée) : asymptote horizontale $y = 0$ en $+\infty$.
- b. $f'(x) =$ Le quotient donne $f'(x) = 1 - \ln x/x^2$ (numérateur : $1/x \times x - \ln x \times 1 = 1 - \ln x$). Comme $x^2 > 0$, le signe est celui de $1 - \ln x$: positif si $x < e$.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1/e	↘	0

Maximum : $f(e) = 1/e \approx 0,37$.

- c. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Signe : $f < 0$ sur $]0 ; 1[$ ($\ln x < 0$), $f(1) = 0$, $f > 0$ sur $]1 ; +\infty[$.
- d. Sur $]0 ; e]$: f est continue strictement croissante de $-\infty$ à **1/e** ; sur $[e ; +\infty[$: continue strictement décroissante de **1/e** à 0 (valeur non atteinte). Donc : si $k > 1/e$: **aucune** solution ; si $k = 1/e$: **une** solution ($x = e$) ; si $0 < k < 1/e$: **deux** solutions ; si $k \leq 0$: **une** solution (dans $]0 ; 1]$, et aucune après car $f > 0$ sur $]1 ; +\infty[$).
- e. $\pi > e$ et f est strictement décroissante sur $[e ; +\infty[$, donc $f(\pi) < f(e)$, soit **$\ln \pi / \pi < 1/e$** . En multipliant par $e\pi > 0$: $e \ln \pi < \pi$, c'est-à-dire $\ln(\pi^e) < \pi = \ln(e^\pi)$. Par croissance de $\ln$: **$\pi^e < e^\pi$** . (Vérification : $\pi^e \approx 22,46$ et $e^\pi \approx 23,14$.)



19 Étude de $x \ln x$ ★★★

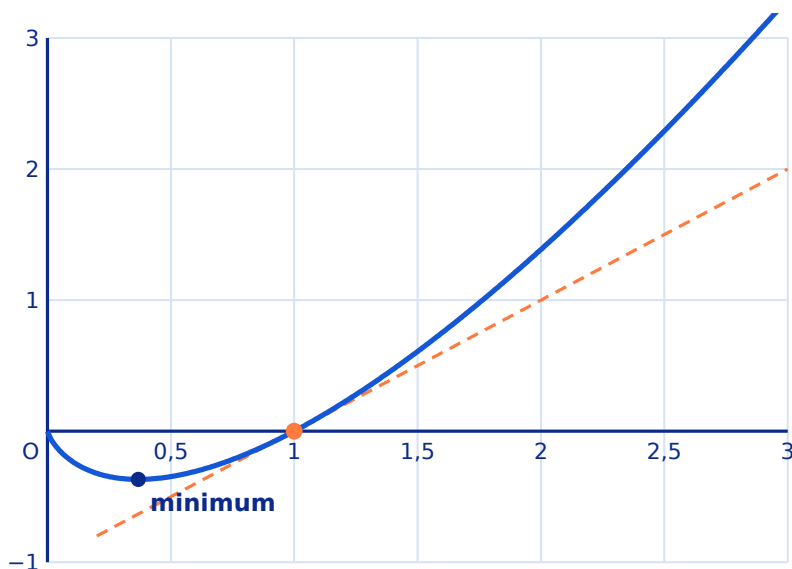
- a. En 0^+ : $x \ln x \rightarrow 0$ (croissance comparée). En $+\infty$: $x \rightarrow +\infty$ et $\ln x \rightarrow +\infty$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$.
- b. $f'(x) = \ln x + 1$, qui s'annule en $x = e^{-1} = 1/e$; $f' > 0 \Leftrightarrow x > 1/e$. $f''(x) = 1/x > 0$: f est **convexe**.

x	0		1/e		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f(x)$	0 (limite)	$\searrow$	$-1/e$	$\nearrow$	$+\infty$

Minimum : $f(1/e) = 1/e \times (-1) = -1/e \approx -0,37$.

- c. $x > 0$ donc $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
- d. $f(1) = 0$ et $f'(1) = 1$: $T : y = x - 1$. Comme f est convexe, sa courbe est **au-dessus** de ses tangentes : $x \ln x \geq x - 1$ sur $]0 ; +\infty[$, avec égalité seulement en 1.



20 Une inégalité fondamentale ★★★

- a. $g'(x) = 1 - 1/x = x-1/x$, négative sur $]0 ; 1[$, positive sur $]1 ; +\infty[$. g admet donc un minimum en 1 : $g(1) = 0$. Ainsi $g(x) \geq 0$, c'est-à-dire $\ln x \leq x - 1$.
- b. Pour $x > 0$, $1/x > 0$, et l'inégalité précédente donne $\ln(1/x) \leq 1/x - 1$, soit $-\ln x \leq 1/x - 1$, donc $\ln x \geq 1 - 1/x$.
- c. Avec $x = 1 + 1/n = n+1/n$: $\ln(1 + 1/n) \leq 1/n$; et $1 - 1/x = 1 - n/n+1 = 1/n+1 \leq \ln(1 + 1/n)$. D'où $1/n+1 \leq \ln(1 + 1/n) \leq 1/n$.
- d. Pour $n = 10$: $1/11 \approx 0,0909 \leq \ln 1,1 \approx 0,0953 \leq 0,1$. L'encadrement est vérifié.

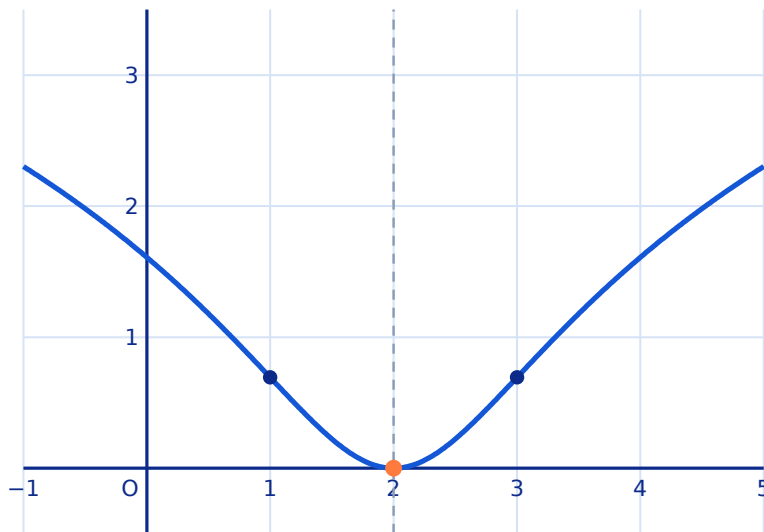
21 Une fonction $\ln(u)$ ★★★

- a. $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 \geq 1 > 0$ pour tout réel x . Donc f est définie sur $\mathbb{R}$.
- b. $f'(x) = 2x-4/x^2-4x+5$. Le dénominateur est > 0 , donc f' a le signe de $2x - 4$: négative pour $x < 2$, positive pour $x > 2$. $f(2) = \ln 1 = 0$. Limites : $x^2 - 4x + 5 \rightarrow +\infty$ en $\pm\infty$, donc $f \rightarrow +\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- c. On calcule $f(4 - x) = \ln((4 - x - 2)^2 + 1) = \ln((2 - x)^2 + 1) = \ln((x - 2)^2 + 1) = f(x)$, et $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 2. La droite $x = 2$ est axe de symétrie.

- d. $f(x) = \ln 2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 3$. $S = \{1 ; 3\}$. Ensuite $f(x) \leq \ln 5 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + 1 \leq 5 \Leftrightarrow (x - 2)^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x - 2 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4$. $S = [0 ; 4]$.



22 Équation $f(x) = 0$: encadrer une solution ★★★

- $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$ sur $]0 ; +\infty[$: f est strictement croissante. En 0^+ : $\ln x \rightarrow -\infty$ et $x - 3 \rightarrow -3$, donc $f \rightarrow -\infty$. En $+\infty$: $\ln x + x - 3 \rightarrow +\infty$.
- f est continue et strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ et passe de $-\infty$ à $+\infty$: d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, 0 a un unique antécédent α . De plus $f(2) = \ln 2 - 1 \approx -0,31 < 0$ et $f(3) = \ln 3 \approx 1,10 > 0$, donc $\alpha \in]2 ; 3[$.
- $f(2,2) = \ln 2,2 - 0,8 \approx -0,011 < 0$ et $f(2,21) = \ln 2,21 - 0,79 \approx 0,003 > 0$. Donc $2,20 < \alpha < 2,21$ ($\alpha \approx 2,208$).
- Par stricte croissance : $f(x) < 0$ pour $0 < x < \alpha$, $f(\alpha) = 0$, $f(x) > 0$ pour $x > \alpha$. On a aussi $\ln \alpha = 3 - \alpha$.
- C'est une **dichotomie** : on garde l'intervalle $[a ; b]$ qui contient la solution (f change de signe entre a et b) et on le coupe en deux jusqu'à ce que sa longueur soit $\leq 0,01$. Si $f(m) < 0$, la solution est après m donc on remplace a par m ; sinon on remplace b par m . Il renvoie un encadrement d'amplitude $\leq 0,01$ de α , $(2,203125 ; 2,2109375)$, qui contient bien $\alpha \approx 2,208$.

23 Croissance bactérienne et demi-vie ★★★

Partie A

- $N(0) = 500 e^0 = 500$. $N(5) = 500 e^{1,5} \approx 2\,241$ bactéries.
- $500 e^{0,3t} = 5\,000 \Leftrightarrow e^{0,3t} = 10 \Leftrightarrow 0,3t = \ln 10 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 10}{0,3} \approx 7,675$ h. Or $0,675$ h $\times 60 \approx 40,5$ min : environ **7 h 40 min**.
- $N(t) = 1\,000 \Leftrightarrow e^{0,3t} = 2 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{0,3} \approx 2,31$ h, soit environ **2 h 19 min**. Le calcul ne fait pas intervenir 500 : le temps de doublement **ne dépend pas de l'effectif initial**.

Partie B

- a. Demi-vie : $A(8) = A_0/2 \Leftrightarrow e^{-8\lambda} = 1/2 \Leftrightarrow -8\lambda = -\ln 2 \Leftrightarrow \lambda = \ln 2/8 \approx 0,087$.
- b. $A(t) = 0,1 A_0 \Leftrightarrow e^{-\lambda t} = 0,1 \Leftrightarrow -\lambda t = \ln 0,1 = -\ln 10 \Leftrightarrow t = \ln 10/\lambda = 8 \ln 10/\ln 2 \approx 26,6$. La quantité est réduite à 10 % au bout d'environ **26,6 jours**.