

Fonction logarithme népérien

Cours de maths - Terminale

Tu connais la fonction exponentielle : elle transforme une somme en produit. Dans ce chapitre, tu vas construire sa fonction réciproque, le **logarithme népérien**, qui fait le chemin inverse : il transforme un produit en somme ! C'est l'outil qui permet de résoudre les équations où l'inconnue est en exposant, de trouver au bout de combien de temps un capital double ou une population atteint un seuil, et d'étudier de nombreuses fonctions. Tu apprendras ses propriétés, sa courbe, ses limites (avec la fameuse « croissance comparée ») et la dérivée de $\ln(u)$.

1. Définition : la réciproque de l'exponentielle

Rappelle-toi : la fonction exponentielle est continue et **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$, avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. Elle prend donc chaque valeur réelle strictement positive, une seule fois.

Théorème (existence et unicité)

Pour tout réel $a > 0$, l'équation $e^x = a$ admet **une unique solution** dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. La fonction $\exp$ est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et prend toutes les valeurs de $]0 ; +\infty[$ (ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont 0 et $+\infty$). D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, tout réel $a > 0$ a exactement un antécédent par $\exp$.

Définition

Pour tout réel $a > 0$, l'unique solution de l'équation $e^x = a$ s'appelle le **logarithme népérien** de a , noté $\ln a$. La fonction $x \mapsto \ln x$, définie sur $]0 ; +\infty[$, est la **fonction logarithme népérien**.

Conséquences immédiates

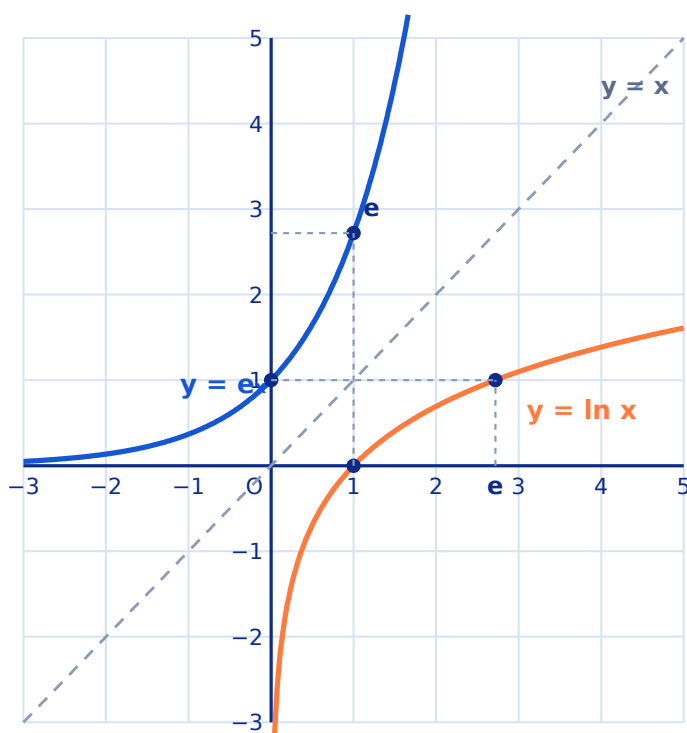
- Pour $x > 0$ et y réel : $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$.
- Pour tout réel x : $\ln(e^x) = x$.
- Pour tout réel $x > 0$: $e^{\ln x} = x$.
- $\ln 1 = 0$ (car $e^0 = 1$) et $\ln e = 1$ (car $e^1 = e$).

Exemple résolu

Calcule $\ln(e^3)$, $\ln(1/e^2)$, $e^{\ln 5}$ et $\ln \sqrt{e}$.

$\ln(e^3) = 3$. Puis $1/e^2 = e^{-2}$, donc $\ln(1/e^2) = -2$. Ensuite $e^{\ln 5} = 5$ car $5 > 0$. Enfin $\sqrt{e} = e^{1/2}$, donc $\ln \sqrt{e} = 1/2$.

Les courbes de $\exp$ et de $\ln$ sont **symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$** (la première bissectrice), comme toujours pour deux fonctions réciproques : si le point $(a ; b)$ est sur la courbe de $\exp$, alors $(b ; a)$ est sur celle de $\ln$. Par exemple, $(1 ; e)$ est sur la courbe de $\exp$, donc $(e ; 1)$ est sur celle de $\ln$.



Piège : le domaine !

$\ln x$ n'existe que pour x **strictement positif**. Les écritures $\ln(-3)$ ou $\ln 0$ n'ont aucun sens : l'exponentielle ne prend jamais de valeur négative ni nulle. À chaque fois que tu vois $\ln(\dots)$, pose la condition « ce qu'il y a dans la parenthèse > 0 ».

2. Propriétés algébriques

Théorème : $\ln$ transforme un produit en somme

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$: **$\ln(ab) = \ln a + \ln b$** .

Démonstration. On a $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = ab$. Le réel $\ln a + \ln b$ est donc une solution de l'équation $e^x = ab$. Or cette équation n'a qu'une solution, qui est par définition

$\ln(ab)$. D'où l'égalité.

Corollaires

Pour $a > 0$, $b > 0$ et n entier relatif :

- $\ln(\mathbf{1/b}) = -\ln b$
- $\ln(\mathbf{a/b}) = \ln a - \ln b$
- $\ln(a^n) = n \ln a$
- $\ln(\sqrt{a}) = \mathbf{1/2} \ln a$

Démonstrations. (1) $\ln(\mathbf{1/b}) + \ln b = \ln(\mathbf{1/b} \times b) = \ln 1 = 0$. (2) $\ln(\mathbf{a/b}) = \ln(a \times \mathbf{1/b}) = \ln a + \ln(\mathbf{1/b}) = \ln a - \ln b$. (3) Par récurrence pour $n \geq 0$: $\ln(a^{n+1}) = \ln(a^n \times a) = n \ln a + \ln a$, et pour $n < 0$ on utilise (1). (4) $(\sqrt{a})^2 = a$, donc $2 \ln(\sqrt{a}) = \ln a$.

Méthode : simplifier une expression avec des $\ln$

- Décompose les nombres en facteurs premiers (ou en puissances) : $12 = 2^2 \times 3$, $50 = 2 \times 5^2$, ...
- Applique $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln(a^n) = n \ln a$, etc.
- Regroupe les termes semblables, ou, dans l'autre sens, rassemble une somme de $\ln$ en un seul $\ln$.

Exemple résolu

On note $a = \ln 2$ et $b = \ln 3$. Exprime $\ln 18$ et $\ln(\mathbf{8/27})$ en fonction de a et b .

$18 = 2 \times 3^2$, donc $\ln 18 = \ln 2 + 2 \ln 3 = a + 2b$.

$\mathbf{8/27} = \mathbf{2^3/3^3}$, donc $\ln(\mathbf{8/27}) = 3 \ln 2 - 3 \ln 3 = 3a - 3b$.

Dans l'autre sens : $\ln 20 - \ln 5 + \ln 3 = \ln(\mathbf{20 \times 3/5}) = \ln 12$.

Pièges classiques

- $\ln(a + b)$ n'est **pas** égal à $\ln a + \ln b$: par exemple $\ln(1 + 2) = \ln 3$, alors que $\ln 1 + \ln 2 = 0 + \ln 2 = \ln 2$, qui est différent de $\ln 3$.
- $\ln(a) \times \ln(b)$ n'est pas $\ln(ab)$, et $\ln \mathbf{a/ln b}$ n'est pas $\ln(a - b)$.
- $\ln(x^2) = 2 \ln x$ seulement pour $x > 0$. Pour tout $x \neq 0$, la bonne formule est $\ln(x^2) = 2 \ln|x|$.

3. Équations et inéquations avec $\ln$

Propriété : $\ln$ est strictement croissante

Comme $\exp$ est strictement croissante, pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$ (et de même avec $\leq, >, \geq$)

En particulier : $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$; $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

Méthode : résoudre une équation ou une inéquation avec $\ln$

- Domaine** : écris que chaque quantité sous un $\ln$ est strictement positive.
- Transforme** pour obtenir un seul $\ln$ de chaque côté, ou « $\ln(\dots) = \text{nombre}$ » (on passe alors à l'exponentielle).
- Résous** l'équation ou l'inéquation obtenue (sans $\ln$).
- Vérifie** que les solutions sont dans le domaine ; pour une inéquation, intersecte avec le domaine.

Exemple 1 : une équation

Résous $\ln(2x - 1) + \ln x = \ln 3$.

Domaine : $2x - 1 > 0$ et $x > 0$, donc $x > \mathbf{1/2}$.

L'équation s'écrit $\ln(x(2x - 1)) = \ln 3$, donc $2x^2 - x = 3$, soit $2x^2 - x - 3 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 1 + 24 = 25$, d'où $x = \mathbf{1+5/4 = 3/2}$ ou $x = \mathbf{1-5/4 = -1}$.

-1 n'est pas dans le domaine. **Solution** : $S = \{\mathbf{3/2}\}$.

Exemple 2 : une inéquation

Résous $\ln(2x + 1) \leq 2$.

Domaine : $2x + 1 > 0$, donc $x > \mathbf{-1/2}$. Comme $2 = \ln(e^2)$, l'inéquation équivaut à $2x + 1 \leq e^2$, soit $x \leq \mathbf{e^2-1/2 \approx 3,19}$.

Solution : $S =]\mathbf{-1/2} ; \mathbf{e^2-1/2}]$.

Exemple 3 : inconnue en exposant

Résous $e^{2x} = 5$. Les deux membres sont strictement positifs : on applique $\ln$, ce qui donne $2x = \ln 5$, donc $x = \mathbf{\ln 5/2 \approx 0,80}$.

Exemple 4 : trouver un seuil

Un capital augmente de 8 % par an. Au bout de combien d'années aura-t-il plus que triplé ?

Il faut $1,08^n > 3$, donc $\ln(1,08^n) > \ln 3$, soit $n \ln 1,08 > \ln 3$. Comme $\ln 1,08 > 0$, on divise sans changer le sens : $n > \ln 3 / \ln 1,08 \approx 14,27$. Le capital a plus que triplé au bout de **15 ans** (on vérifie : $1,08^{14} \approx 2,94$ et $1,08^{15} \approx 3,17$).

Attention au signe de $\ln q$

Pour résoudre $q^n < A$ on obtient $n \ln q < \ln A$. Si $0 < q < 1$, alors $\ln q < 0$: en divisant par $\ln q$, **le sens de l'inégalité s'inverse**. Exemple : $0,8^n < 0,01 \Leftrightarrow n > \ln 0,01 / \ln 0,8 \approx 20,6$.

4. Dérivée et variations de $\ln$

Théorème

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et, pour tout $x > 0$: **$\ln'(x) = 1/x$** .

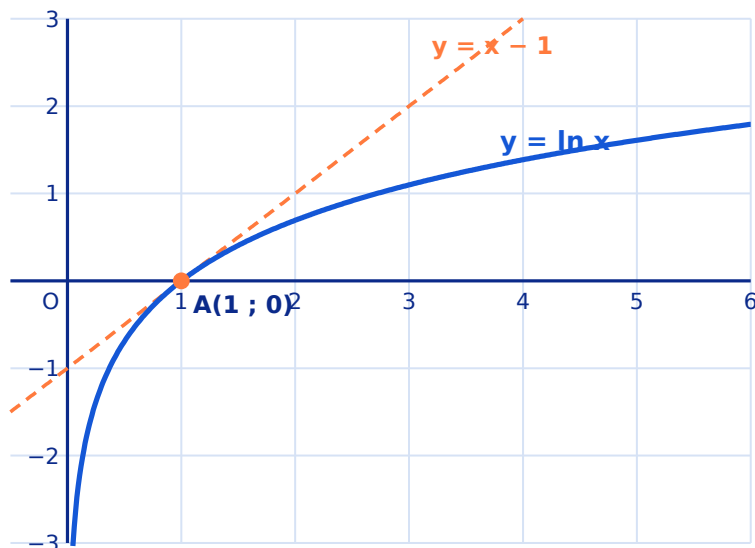
Démonstration. La dérivabilité de $\ln$ (fonction réciproque d'une fonction dérivable de dérivée jamais nulle) est admise. On dérive alors l'égalité $e^{\ln x} = x$: la dérivée de la composée est $\ln'(x) \times e^{\ln x} = 1$, c'est-à-dire $\ln'(x) \times x = 1$, d'où $\ln'(x) = 1/x$.

Comme $1/x > 0$ sur $]0 ; +\infty[$, la fonction $\ln$ est **strictement croissante**. Sa dérivée seconde est $\ln''(x) = -1/x^2 < 0$: $\ln$ est **concave**, sa courbe est « penchée vers le bas ».

x	0		$+\infty$
Signe de $\ln'(x) = 1/x$		+	
Variations de $\ln$	$-\infty$ (limite)	$\nearrow$	$+\infty$ (limite)

Tangente en 1 et inégalité à retenir

Au point $A(1 ; 0)$, le nombre dérivé est $\ln'(1) = 1$, donc la tangente a pour équation $y = x - 1$. Comme $\ln$ est concave, sa courbe est **sous** sa tangente : pour tout $x > 0$, **$\ln x \leq x - 1$** .



Exemple

Détermine l'équation de la tangente à la courbe de $\ln$ au point d'abscisse 2. On a $\ln 2$ et $\ln'(2) = \frac{1}{2}$, donc $y = \ln 2 + \frac{1}{2}(x - 2) = \frac{1}{2}x + \ln 2 - 1$.

Mathbot te souffle

Pour une dérivée, pense à $\ln$ comme à « l'exponentielle à l'envers » : e^x reste la même en dérivant, mais sa réciproque $\ln$ a pour dérivée l'inverse $\frac{1}{x}$. Le produit des deux pentes en des points symétriques fait 1.

5. Limites et croissance comparée

Théorème : limites aux bornes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$$

Démonstration. Soit A un réel. Si $x > e^A$, alors $\ln x > \ln(e^A) = A$ ($\ln$ est croissante) : $\ln x$ dépasse n'importe quel seuil, donc la limite en $+\infty$ est $+\infty$. En 0^+ , on pose $t = \frac{1}{x}$: $\ln x = -\ln t$ et $t \rightarrow +\infty$, donc $\ln x \rightarrow -\infty$.

La courbe de $\ln$ admet donc l'axe des ordonnées (droite d'équation $x = 0$) comme **asymptote verticale**. En $+\infty$, $\ln$ ne tend vers l'infini que très lentement : $\ln 1000 \approx 6,9$ seulement, et il faut $x \approx 2,7 \times 10^{43}$ pour atteindre $\ln x = 100$.

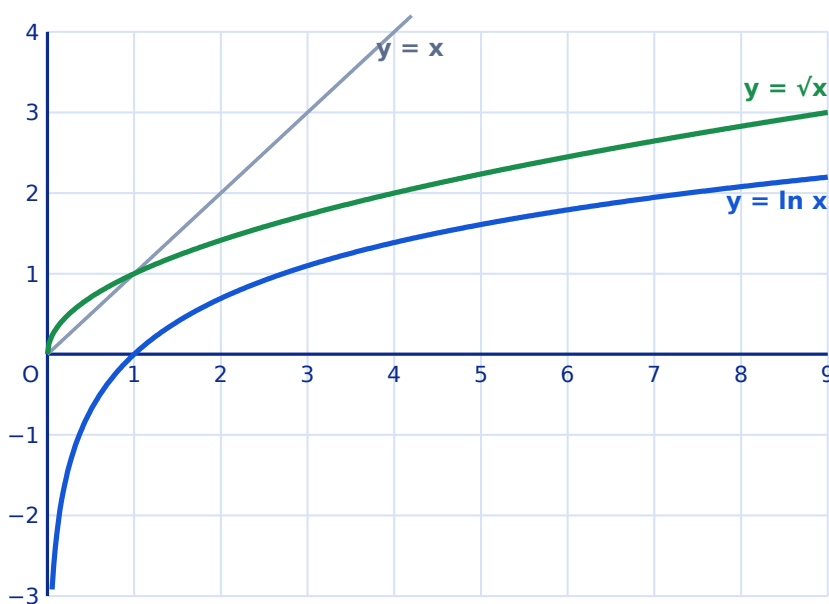
Théorème : croissance comparée

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0.$$

Plus généralement, pour tout entier $n \geq 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x / x^n = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$. En résumé : **en $+\infty$, « x gagne contre $\ln x$ ».**

Démonstration de la première limite. On pose $y = \ln x$, donc $x = e^y$; quand $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow +\infty$. Alors $\ln x / x = y / e^y = 1 \div e^y / y$. Or $e^y / y \rightarrow +\infty$ (croissance comparée de exp), donc $y / e^y \rightarrow 0$. Pour la seconde, on pose $t = 1/x$: $x \ln x = -\ln t / t$, et $t \rightarrow +\infty$, donc la limite est 0.

Voici $\ln$, la racine carrée et l'identité : la courbe de $\ln$ reste toujours sous les deux autres.



Nombre dérivé en 1

$\lim_{h \rightarrow 0} \ln(1+h)/h = 1$. C'est exactement la définition de $\ln'(1) = 1$: le taux d'accroissement de $\ln$ entre 1 et $1+h$ est $\ln(1+h) - \ln 1/h$.

Méthode : lever une forme indéterminée avec $\ln$

Quand x et $\ln x$ s'affrontent ($+\infty - \infty$, ou $0 \times \infty$), **factorise par le terme dominant** puis utilise la croissance comparée.

Exemple 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$: on écrit $x - \ln x = x(1 - \ln x / x)$. Comme $\ln x / x \rightarrow 0$, le facteur entre parenthèses tend vers 1 et $x \rightarrow +\infty$: la limite est $+\infty$.

Exemple 2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x - x)$: $x \ln x \rightarrow 0$ et $x \rightarrow 0$, donc la limite est **0**.

Exemple 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \ln x / x) = 1$ (car $\ln x / x \rightarrow 0$).

6. La fonction $\ln(u)$

Définition

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et **strictement positive** sur I . On note $\ln(u)$ ou $\ln \circ u$ la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$, définie sur I .

Son domaine est l'ensemble des x pour lesquels $u(x) > 0$.

Théorème : dérivée de $\ln(u)$

Si u est dérivable et strictement positive sur I , alors $\ln(u)$ est dérivable sur I et : **$(\ln u)' = u'/u$** .

Démonstration. C'est la dérivée d'une composée : $(\ln \circ u)'(x) = u'(x) \times \ln'(u(x)) = u'(x) \times 1/u(x)$.

Conséquences

- **Variations** : $(\ln u)' = u'/u$ a le signe de u' car $u > 0$. Donc $\ln(u)$ a **les mêmes variations que u** ($\ln$ est croissante, elle conserve l'ordre).
- **Limites** : on les obtient par composition. Si $\lim u(x) = \ell > 0$, alors $\lim \ln(u(x)) = \ln \ell$; si $\lim u(x) = +\infty$, alors $\lim \ln u(x) = +\infty$; si $\lim u(x) = 0^+$, alors $\lim \ln u(x) = -\infty$.
- **Primitives** : sur un intervalle où $u > 0$, la fonction u'/u admet pour primitive $\ln(u)$.

Exemple résolu

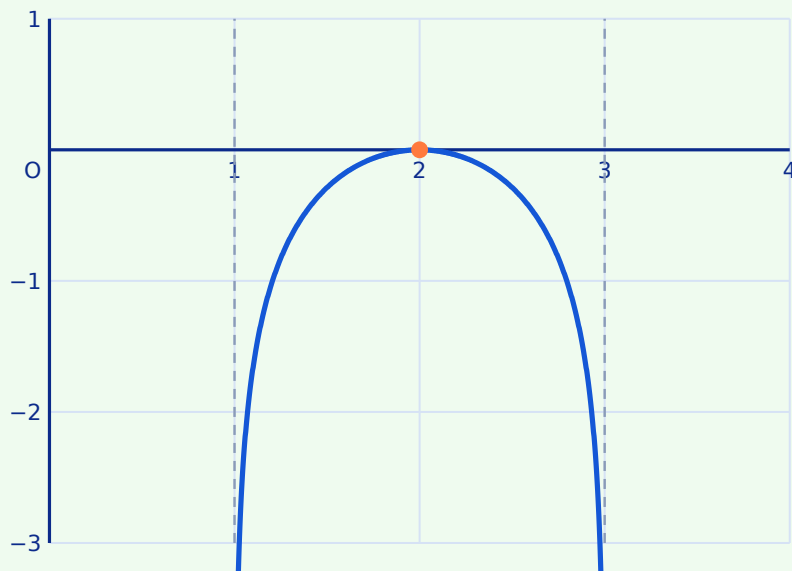
Étudie $f(x) = \ln(-x^2 + 4x - 3)$.

Domaine : $-x^2 + 4x - 3 > 0$. Les racines du trinôme sont 1 et 3 (car $-(x-1)(x-3)$) et le coefficient de x^2 est négatif, donc le trinôme est positif entre ses racines : f est définie sur $]1 ; 3[$.

Dérivée : $f'(x) = \frac{-2x+4}{-x^2+4x-3}$. Le dénominateur est positif sur $]1 ; 3[$, donc f' a le signe de $-2x + 4$: positive pour $x < 2$, négative après.

Limites : quand $x \rightarrow 1^+$ ou $x \rightarrow 3^-$, le trinôme tend vers 0^+ , donc $f(x) \rightarrow -\infty$. Les droites $x = 1$ et $x = 3$ sont asymptotes verticales. Enfin $f(2) = \ln(-4 + 8 - 3) = \ln 1 = 0$.

x	1		2		3
Signe de $f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$



Exemples de primitives

- sur $]0 ; +\infty[$, $x \mapsto \mathbf{1/x}$ a pour primitive $\ln x$;
- sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \mathbf{2x/x^2+1}$ a pour primitive $\ln(x^2 + 1)$ (ici $u = x^2 + 1 > 0$ et $u' = 2x$) ;
- sur $]-2/3 ; +\infty[$, $x \mapsto \mathbf{1/3x+2 = 1/3 \times 3/3x+2}$ a pour primitive $\mathbf{1/3 \ln(3x + 2)}$;
- une intégrale : $\int_1^e \mathbf{1/x} \, dx = \ln e - \ln 1 = 1$.

Ne confonds pas

$\ln(u)$ a pour dérivée $\mathbf{u'/u}$ (un quotient), alors que e^u a pour dérivée $\mathbf{u' \cdot e^u}$ (un produit). Et la dérivée de $(\ln x)^2$ n'est pas $\mathbf{1/x^2}$: c'est $2 \times \mathbf{1/x} \times \ln x$, de la forme $2v'v$ avec $v = \ln x$.

7. Méthode : étudier une fonction contenant $\ln$

Plan d'étude type

- Domaine de définition** (conditions sous les $\ln$, dénominateurs).
- Limites** aux bornes du domaine, et asymptotes éventuelles. Penser à la croissance comparée.
- Dérivée** : produit, quotient, $\ln(u)$... ; mise sous forme factorisée.
- Signe** de la dérivée (souvent : résoudre $\ln x > 1$, ce qui donne $x > e$).
- Tableau de variations** complet, avec les valeurs aux extrema.
- Questions annexes** : équation $f(x) = k$, tangente, signe de f , position de deux courbes.

Exemple résolu complet

Étudie la fonction $f(x) = \mathbf{3 - \ln x/x}$ sur $]0 ; +\infty[$.

Limites. En $0^+ : 3 - \ln x \rightarrow +\infty$ et $1/x \rightarrow +\infty$, donc $f(x) \rightarrow +\infty$ (asymptote verticale $x = 0$). En $+\infty : f(x) = 3/x - \ln x/x \rightarrow 0 - 0 = 0$ (asymptote horizontale $y = 0$).

Dérivée. $f = v/w$ avec $v = 3 - \ln x$, $v' = -1/x$, $w = x$, $w' = 1$. Le numérateur de la dérivée vaut $-1/x \times x - (3 - \ln x) \times 1 = -1 - 3 + \ln x = \ln x - 4$, donc $f'(x) = \ln x - 4/x^2$.

Signe. $x^2 > 0$, donc f' a le signe de $\ln x - 4$: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 4 \Leftrightarrow x > e^4$.

x	0		e^4		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-e^{-4}$	$\nearrow$	0

Le minimum est $f(e^4) = 3 - 4/e^4 = -e^{-4} \approx -0,018$. De plus $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 3 \Leftrightarrow x = e^3 \approx 20,1$: la courbe coupe l'axe des abscisses en ce point seulement.



8. Modéliser : durée de doublement et demi-vie

Le logarithme sert à répondre à la question « **au bout de combien de temps ?** » dans les phénomènes de croissance ou de décroissance exponentielle.

Méthode

- Écris le modèle : par exemple $N(t) = N_0 e^{kt}$ ou $N_0 \times q^t$.
- Traduis la question par une équation ou une inéquation (« doublement » : $N = 2N_0$; « demi-vie » : $N = N_0/2$).
- Simplifie par N_0 , applique $\ln$ aux deux membres, puis isole t .

Exemple résolu

Une colonie compte $N(t) = 200 e^{0,25t}$ individus (t en jours). Quel est le temps de doublement ?

$N(t) = 400 \Leftrightarrow 200 e^{0,25t} = 400 \Leftrightarrow e^{0,25t} = 2 \Leftrightarrow 0,25t = \ln 2 \Leftrightarrow t = \ln 2 / 0,25 = 4 \ln 2 \approx 2,77$ jours. Le temps de doublement ne dépend pas de l'effectif de départ.

À retenir

- $\ln$ est la réciproque de $\exp$: pour $x > 0$, $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$; $\ln(e^x) = x$, $e^{\ln x} = x$; $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$.
- Domaine : $]0 ; +\infty[$. Toujours écrire « sous le $\ln$, c'est > 0 ».
- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$; $\ln(a^n) = n \ln a$; $\ln \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \ln a$. Mais $\ln(a + b)$ ne se simplifie pas.
- $\ln$ est strictement croissante : $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$; $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$; $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.
- $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$; $\ln$ est concave ; tangente en 1 : $y = x - 1$; $\ln x \leq x - 1$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$; croissance comparée : $\ln x/x \rightarrow 0$ en $+\infty$ et $x \ln x \rightarrow 0$ en 0^+ .
- $(\ln u)' = u'/u$ (avec $u > 0$) ; $\ln(u)$ varie comme u ; une primitive de u'/u est $\ln(u)$.
- Pour un seuil $q^n > A$, on passe au $\ln$: $n \ln q > \ln A$; si $0 < q < 1$, $\ln q < 0$ et le sens s'inverse.