

Fonction logarithme népérien

Exercices de maths - Terminale

23 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

1 Valeurs simples ★★★

Donne la valeur exacte de chacun des nombres suivants.

- a. $\ln(e^4)$
- b. $\ln 1$
- c. $\ln(\mathbf{1/e})$
- d. $\ln \sqrt{e}$
- e. $e^{\ln 7}$
- f. $e^{2 \ln 3}$
- g. $\ln(e^{-3})$

2 Équations $\ln x = k$ ★★★

Résous chaque équation en précisant d'abord le domaine.

- a. $\ln x = 3$
- b. $\ln x = -2$
- c. $\ln(2x - 1) = 0$
- d. $\ln(x + 4) = 1$

3 Exprimer avec $\ln 2$ et $\ln 3$ ★★★

On note $a = \ln 2$ et $b = \ln 3$. Exprime en fonction de a et de b :

- a. $\ln 6$
- b. $\ln 12$
- c. $\ln 8$
- d. $\ln(\mathbf{2/3})$
- e. $\ln 18$
- f. $\ln \sqrt{24}$
- g. $\ln(\mathbf{1/72})$

4 Vrai ou faux ? ★★★

Dis si chaque affirmation est vraie ou fausse, et justifie.

- a. $\ln(3 + 5) = \ln 3 + \ln 5$.
- b. Pour tout réel x non nul, $\ln(x^2) = 2 \ln x$.
- c. $\ln(\mathbf{1/5}) = -\ln 5$.
- d. L'équation $\ln x = -5$ admet une solution.
- e. Si $a < b$ alors $\ln a < \ln b$.

5 Ensembles de définition ★★★

Détermine l'ensemble de définition de chaque fonction.

- a. $f(x) = \ln(3x - 6)$
- b. $g(x) = \ln(x^2 - 9)$
- c. $h(x) = \ln(\mathbf{x+1/x-4})$
- d. $k(x) = \ln(4 - x^2)$

6 Simplifier des sommes de $\ln$ ★★★

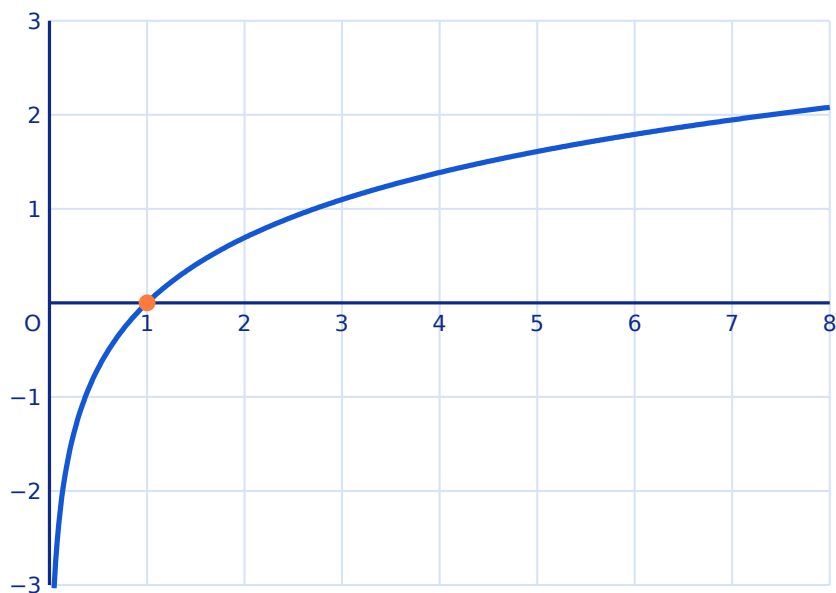
Écris chaque expression sous la forme la plus simple (un entier, ou un multiple de $\ln 2$).

- a. $A = \ln 5 + \ln 4 - \ln 10$
- b. $B = 3 \ln 2 + \ln 5 - \ln 40$
- c. $C = \ln 18 - 2 \ln 3 + \ln 4$
- d. $D = \ln 125 - 3 \ln 5 + \ln(e^2)$

7 Lecture graphique ★★★

On donne la courbe de la fonction $\ln$. Avec la précision du graphique, lis :

- a. une valeur approchée de $\ln 2$ et de $\ln 5$;
- b. une valeur approchée de la solution de $\ln x = -1$;
- c. une valeur approchée de la solution de $\ln x = 1,5$;
- d. l'ensemble des réels x tels que $\ln x \geq 1$.



8 Équations avec $\ln$ ★★★

Résous chaque équation (domaine, résolution, vérification).

- $\ln(x - 3) = \ln(2x - 10)$
- $\ln x + \ln(x - 2) = \ln 3$
- $2 \ln x = \ln(3x + 4)$
- $\ln(x^2 - 1) = \ln 8$

9 Changement d'inconnue ★★★

Résous, en posant $X = \ln x$:

- $(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 = 0$
- $2(\ln x)^2 + \ln x - 1 = 0$

10 Inéquations avec $\ln$ ★★★

Résous chaque inéquation.

- $\ln(2x - 1) > 1$
- $\ln(x + 3) \leq \ln(5 - x)$
- $\ln x \geq -2$
- $\ln(x^2 - 4) < 0$

11 Inconnue en exposant ★★★

Résous dans $\mathbb{R}$ (donne la valeur exacte, puis une valeur approchée au centième).

- a. $e^{2x} = 7$
- b. $3e^x - 2 = 10$
- c. $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$
- d. $e^{-x+1} < 2$

12 Seuils ★★★

Pour chaque situation, détermine le plus petit entier n qui convient.

- a. Un capital de 1 000 € placé à 5 % par an est devenu supérieur à 2 000 €.
- b. Une substance perd 20 % de sa masse chaque heure. Au bout de combien d'heures reste-t-il moins de 1 % de la masse initiale ?
- c. $3^n > 1\,000\,000$.

13 Dérivées ★★★

Calcule la dérivée de chaque fonction sur son intervalle de définition.

- a. $f(x) = x \ln x - x$ sur $]0 ; +\infty[$
- b. $g(x) = \ln x/x$ sur $]0 ; +\infty[$
- c. $h(x) = x^2 \ln x$ sur $]0 ; +\infty[$
- d. $k(x) = \ln(3x + 1)$ sur $] -1/3 ; +\infty[$
- e. $p(x) = (\ln x)^2$ sur $]0 ; +\infty[$

14 Limites ★★★

Détermine les limites suivantes (indique la méthode utilisée).

- a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x/x^2$
- b. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$
- c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 \ln x - x)$
- d. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1/x + \ln x)$
- e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1)/x$

15 Étude de $x - 2 \ln x$ ★★★

Soit $f(x) = x - 2 \ln x$ sur $]0 ; +\infty[$.

- a. Calcule $f'(x)$ et étudie son signe.
- b. Calcule les limites de f en 0 et en $+\infty$.
- c. Dresse le tableau de variations de f . Montre que $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

16 Tangentes ★★★

Détermine une équation de la tangente à la courbe de :

- a. $x \mapsto \ln x$ au point d'abscisse e . Que remarques-tu ?
- b. $x \mapsto x \ln x$ au point d'abscisse 1 ;
- c. $x \mapsto \ln(2x)$ au point d'abscisse $1/2$.

17 Primitives et intégrales ★★★

Détermine une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué, puis calcule l'intégrale demandée.

- a. $f(x) = 1/x + 2x$ sur $]0 ; +\infty[$;
- b. $g(x) = 2x + 1/x^2 + x + 1$ sur $\mathbb{R}$;
- c. $h(x) = 1/3x + 2$ sur $] -2/3 ; +\infty[$;
- d. calcule $\int_0^1 2x/x^2 + 1 \, dx$.

18 Étude de $\ln x / x$ ★★★

Soit $f(x) = \ln x / x$ sur $]0 ; +\infty[$.

- a. Calcule les limites de f en 0 et en $+\infty$. Interprète graphiquement.
- b. Montre que $f'(x) = 1 - \ln x / x^2$ et dresse le tableau de variations de f .
- c. Résous $f(x) = 0$ et donne le signe de f .
- d. Combien de solutions l'équation $f(x) = k$ admet-elle selon la valeur de k ?
- e. Compare e^π et π^e (on admet que $\pi > e$). Aide : compare $f(\pi)$ et $f(e)$.

19 Étude de $x \ln x$ ★★★

Soit $f(x) = x \ln x$ sur $]0 ; +\infty[$.

- a. Étudie les limites de f aux bornes.
- b. Calcule f' et f'' ; dresse le tableau de variations ; précise la convexité.
- c. Résous $f(x) = 0$.
- d. Détermine la tangente T en 1 et étudie la position de la courbe par rapport à T .

20 Une inégalité fondamentale ★★★

Soit $g(x) = x - 1 - \ln x$ sur $]0 ; +\infty[$.

- a. Étudie les variations de g et montre que $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$.
- b. En remplaçant x par $1/x$, montre que $\ln x \geq 1 - 1/x$.
- c. Pour un entier $n \geq 1$, applique ces deux encadrements avec $x = 1 + 1/n$ et montre

Fiche en ligne : maths-facile.eu/fonction-logarithme-neperien-exercices-terminale/ · Cours, exercices et contrôles

- que $\frac{1}{n+1} \leq \ln(1 + \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}$.
- d. Vérifie l'encadrement pour $n = 10$.

21 Une fonction $\ln(u)$ ★★★

Soit $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5)$.

- Montre que f est définie sur $\mathbb{R}$.
- Calcule $f'(x)$ et dresse le tableau de variations (avec les limites en $-\infty$ et $+\infty$).
- Montre que la droite d'équation $x = 2$ est axe de symétrie de la courbe.
- Résous $f(x) = \ln 2$, puis $f(x) \leq \ln 5$.

22 Équation $f(x) = 0$: encadrer une solution ★★★

Soit $f(x) = \ln x + x - 3$ sur $]0 ; +\infty[$.

- Montre que f est strictement croissante et détermine ses limites aux bornes.
- Montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α , et que $\alpha \in]2 ; 3[$.
- Encadre α par deux décimaux consécutifs à 10^{-2} près.
- Déduis-en le signe de $f(x)$ selon x .
- On donne ce programme Python. Que renvoie-t-il en gros et pourquoi est-il juste ?

```
from math import log

def dichotomie(a, b, e):
    while b - a > e:
        m = (a + b) / 2
        if log(m) + m - 3 < 0:
            a = m
        else:
            b = m
    return a, b

print(dichotomie(2, 3, 0.01))
```

23 Croissance bactérienne et demi-vie ★★★

Partie A. Une culture contient $N(t) = 500 e^{0,3t}$ bactéries à l'instant t (en heures).

- Calcule $N(0)$ et $N(5)$ (arrondi à l'unité).
- Au bout de combien de temps la culture atteint-elle 5 000 bactéries ? Donne le résultat en heures et minutes.

c. Calcule le temps de doublement. Dépend-il de l'effectif initial ?

Partie B. Un produit radioactif a une demi-vie de 8 jours : sa quantité est $A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$ (t en jours).

a. Détermine λ (valeur exacte, puis arrondi à 10^{-3}).

b. Au bout de combien de jours la quantité est-elle réduite à 10 % de A_0 ?