

Fonctions linéaires et affines

Cours de maths - 3ème

Un taxi, un abonnement de salle de sport, une recette que l'on double ou que l'on triple, une promotion en magasin : dans tous ces cas, une grandeur dépend d'une autre selon une règle simple. En 3ème, tu apprends à décrire ces situations avec deux outils très puissants, les **fonctions linéaires** et les **fonctions affines**. Tu sauras les écrire avec une formule, les calculer, les tracer et les retrouver à partir de deux informations. Elles te serviront aussi dans les problèmes de tarifs et de pourcentages.

1. Rappels : fonction, image, antécédent

Fonction

Une **fonction** est un procédé qui, à chaque nombre x choisi au départ, associe **un seul** nombre. On note $f : x \mapsto f(x)$. On lit « f de x ».

Image et antécédent

Si $f(4) = 10$, alors **10 est l'image de 4** par f , et **4 est un antécédent de 10** par f . On trouve l'image en *remplaçant* x par la valeur dans la formule ; on trouve un antécédent en *résolvant une équation*.

Exemple

Soit $f(x) = 3x + 1$.

- Image de 5 : $f(5) = 3 \times 5 + 1 = 16$.
- Antécédent de 22 : on résout $3x + 1 = 22$, donc $3x = 21$, donc $x = 7$. On vérifie : $f(7) = 22$.

Rappelle-toi aussi qu'une situation est **proportionnelle** quand on passe d'une ligne à l'autre d'un tableau en multipliant toujours par le même nombre, appelé le **coefficient de proportionnalité**. C'est exactement ce qui se cache derrière les fonctions linéaires.

2. La fonction linéaire

Fonction linéaire

Une **fonction linéaire** est une fonction de la forme **$f(x) = ax$** , où a est un nombre fixé,
Fiche en ligne : maths-facile.eu/fonctions-lineaires-et-affines-cours-3eme/ · Cours, exercices et contrôles corrigés sur

appelé le **coefficient** de la fonction. On multiplie toujours x par le même nombre a .

Exemples

$f(x) = 6x$ (coefficient 6) ; $g(x) = -2,5x$ (coefficient $-2,5$) ; $h(x) = x/4 = 1/4x$ (coefficient $0,25$).

Lien avec la proportionnalité

Une fonction linéaire $f(x) = ax$ traduit une situation de proportionnalité : le nombre a est le coefficient de proportionnalité. Si x double, $f(x)$ double aussi. En particulier, **$f(0) = 0$** .

Méthode : trouver le coefficient

Si l'on connaît un nombre x (non nul) et son image $f(x)$, alors **$a = f(x)/x$** .

Exemple : une fonction linéaire f vérifie $f(8) = 20$. Alors $a = 20 \div 8 = 2,5$, donc $f(x) = 2,5x$. On peut ensuite calculer $f(10) = 25$, ou chercher l'antécédent de 15 : $2,5x = 15$, donc $x = 6$.

Piège

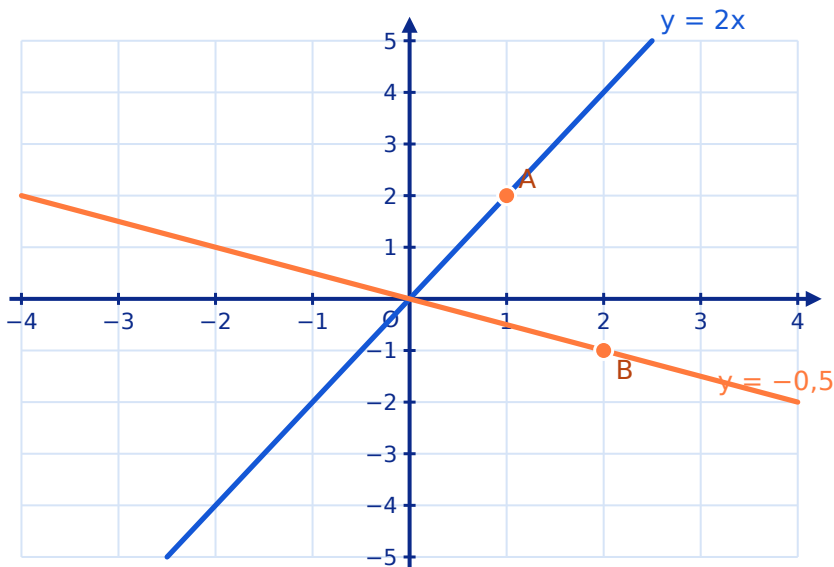
La fonction $f(x) = 2x + 5$ n'est **pas** linéaire : elle ne vérifie pas $f(0) = 0$ (ici $f(0) = 5$). Ne confonds pas « fonction linéaire » et « fonction dont la courbe est une droite » : toutes les droites ne passent pas par l'origine.

3. Représentation graphique d'une fonction linéaire

Propriété

Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction linéaire $f(x) = ax$ est une **droite qui passe par l'origine** O du repère. Le nombre a s'appelle le **coefficient directeur** (ou la **pente**) de la droite : la droite passe par le point de coordonnées $(1 ; a)$.

Pour tracer cette droite, un seul point en plus de l'origine suffit. On calcule une image avec un nombre facile, on place le point, puis on trace la droite avec la règle.



En bleu, $f(x) = 2x$: le point A(1 ; 2) est sur la droite. En orange, $g(x) = -0,5x$: le point B(2 ; -1) est sur la droite.

Méthode : tracer la droite de $f(x) = ax$

1. Choisis un nombre x simple (souvent 1, 2 ou 4) et calcule $f(x)$.
2. Place le point de coordonnées $(x ; f(x))$.
3. Trace la droite qui passe par ce point et par l'origine.

Sens de variation

Si $a > 0$, la droite « monte » quand on la lit de gauche à droite : la fonction est **croissante**. Si $a < 0$, la droite « descend » : la fonction est **décroissante**. Plus a est grand (en valeur absolue), plus la droite est raide.

Lecture graphique

Sur la droite bleue ci-dessus, l'image de 2 se lit en partant de 2 sur l'axe horizontal, en montant jusqu'à la droite, puis en allant vers l'axe vertical : on trouve 4. L'antécédent de -4 se lit dans l'autre sens : on trouve -2.

4. La fonction affine

Fonction affine

Une **fonction affine** est une fonction de la forme $f(x) = ax + b$, où a et b sont deux nombres fixés. On multiplie x par a , puis on ajoute b .

- Le nombre a est le **coefficient directeur** (ou pente).

- Le nombre b est l'**ordonnée à l'origine** : c'est l'image de 0, car $f(0) = a \times 0 + b = b$.

Deux cas particuliers

- Si $b = 0$, on a $f(x) = ax$: **une fonction linéaire est une fonction affine particulière**.
- Si $a = 0$, on a $f(x) = b$: c'est une **fonction constante**, tous les nombres ont la même image.

Reconnaître une fonction affine

Il faut parfois développer pour voir la forme $ax + b$.

- $f(x) = 4 - 3x = -3x + 4$: affine, $a = -3$ et $b = 4$.
- $g(x) = 2(x + 5) = 2x + 10$: affine, $a = 2$ et $b = 10$.
- $h(x) = x^2 + 1$: **pas** affine, à cause du carré.

Méthode : image et antécédent

Pour $f(x) = 5x - 3$:

- **Image de 4** : $f(4) = 5 \times 4 - 3 = 17$.
- **Antécédent de 27** : on résout $5x - 3 = 27$, donc $5x = 30$, donc $x = 6$.

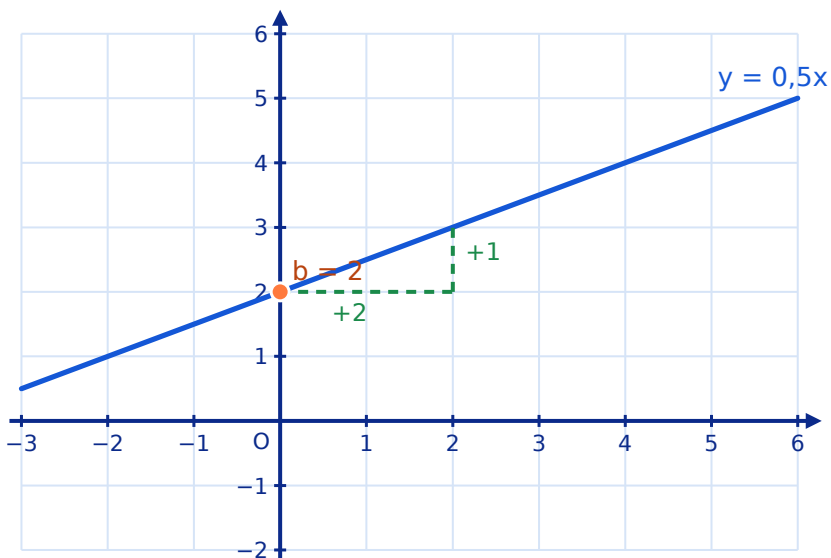
Piège

Une fonction affine avec $b \neq 0$ n'est **pas** proportionnelle : si x double, $f(x)$ ne double pas. Par exemple, avec $f(x) = 5x - 3$, on a $f(2) = 7$ mais $f(4) = 17$, qui est différent de 2×7 .

5. Représentation graphique d'une fonction affine

Propriété

Dans un repère, la représentation graphique de la fonction affine $f(x) = ax + b$ est une **droite**. On dit que cette droite a pour **équation** $y = ax + b$. Elle coupe l'axe vertical au point $(0 ; b)$, et quand on avance de 1 vers la droite, on monte de a (on descend si a est négatif).



Droite d'équation $y = 0,5x + 2$: elle coupe l'axe vertical en 2 ; quand on avance de 2 vers la droite, on monte de 1 (ce qui fait bien 0,5 par unité).

Méthode : tracer la droite de $f(x) = ax + b$

1. Calcule les images de **deux** nombres de ton choix (0 est un très bon choix : $f(0) = b$).
2. Place les deux points dans le repère.
3. Trace la droite qui passe par ces deux points, en la prolongeant des deux côtés.
4. Vérifie avec un troisième point : il doit être aligné.

Exemple

Tracer la droite de $g(x) = -2x + 3$. On calcule $g(0) = 3$ et $g(2) = -2 \times 2 + 3 = -1$. On place les points (0 ; 3) et (2 ; -1) et on les relie. Vérification : $g(1) = 1$, donc le point (1 ; 1) doit être sur la droite.

Sens de variation

Si $a > 0$: la fonction affine est **croissante**. Si $a < 0$: elle est **décroissante**. Si $a = 0$: elle est **constante** (droite horizontale). Deux droites ayant le même coefficient directeur a sont **parallèles**.

Astuce de Mathbot

Pour lire une droite sur un graphique : repère d'abord où elle coupe l'axe vertical, c'est ton b . Ensuite, avance d'un cran vers la droite et regarde de combien elle monte ou descend, c'est ton a . Avec ces deux nombres, tu as toute la formule !

6. Déterminer une fonction affine avec deux informations

Une droite est entièrement connue dès que l'on sait par quels deux points elle passe. Pour une fonction affine, c'est pareil : deux nombres et leurs images suffisent.

Calcul du coefficient directeur

Si f est une fonction affine, avec $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$ (et $x_1 \neq x_2$), alors

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

On le dit ainsi : a est la variation des images divisée par la variation des nombres de départ.

Méthode

1. Calcule a avec la formule ci-dessus.
2. Remplace a dans $f(x) = ax + b$, puis utilise l'une des deux informations pour trouver b .
3. Écris la formule complète et vérifie-la avec l'autre information.

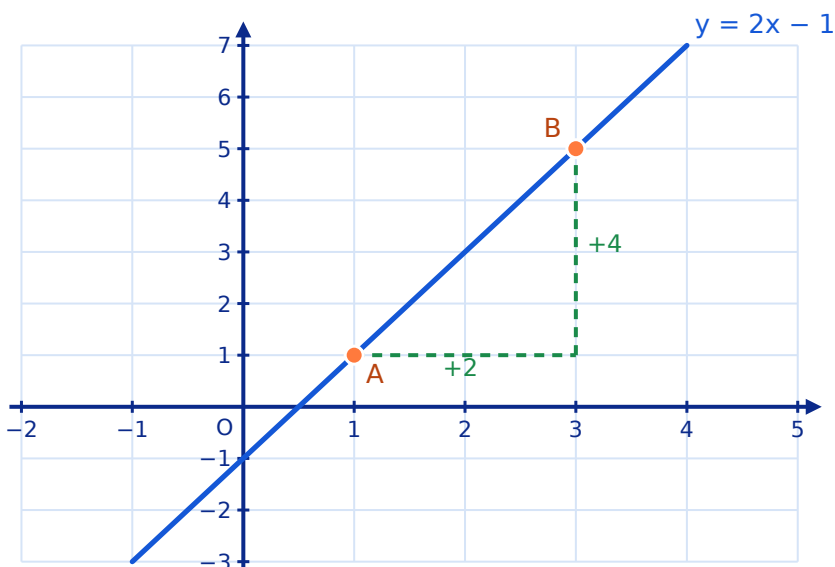
Exemple résolu

Une fonction affine f vérifie $f(1) = 1$ et $f(3) = 5$.

1) $a = \frac{5 - 1}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2$.

2) $f(x) = 2x + b$. Comme $f(1) = 1$: $2 \times 1 + b = 1$, donc $b = -1$.

3) $f(x) = 2x - 1$. Vérification : $f(3) = 2 \times 3 - 1 = 5$. ✓



La droite passe par A(1 ; 1) et B(3 ; 5). Pour aller de A à B, on avance de 2 et on monte de 4 : la pente est $4 \div 2 = 2$.

Piège

Dans la formule de a , garde le même ordre en haut et en bas : si tu as fait « image de B moins image de A » en haut, tu dois faire « abscisse de B moins abscisse de A » en bas. Attention aussi aux nombres négatifs : $-1-5/3+1$ se calcule bien comme $(-6) \div 4$.

7. Résoudre des problèmes : tarifs et abonnements

Les fonctions affines modélisent les situations où l'on paie une **somme fixe** (b) plus une **somme proportionnelle** à la quantité ($a \times x$) : abonnement + prix à l'unité, prise en charge d'un taxi + prix du kilomètre, etc.

Exemple : comparer deux offres

Une salle d'escalade propose deux formules. Offre A : 8 € par séance. Offre B : une carte annuelle à 30 € puis 5 € par séance.

Avec x le nombre de séances : $A(x) = 8x$ (linéaire) et $B(x) = 5x + 30$ (affine).

Les deux offres coûtent autant quand $8x = 5x + 30$, donc $3x = 30$, donc $x = 10$. Pour 10 séances, on paie 80 € dans les deux cas.

Conclusion : en dessous de 10 séances, l'offre A est moins chère ; au-delà, l'offre B est plus avantageuse (par exemple, pour 12 séances : 96 € contre 90 €).

Méthode pour un problème

1. Choisis la variable x (la quantité) et dis clairement ce qu'elle représente, avec l'unité.
2. Écris la formule de chaque fonction : cherche la partie fixe (b) et la partie qui dépend de x (a).
3. Calcule des images ou résous une équation selon la question.
4. Termine par une phrase-réponse avec l'unité.

Interprétation graphique

Le point où les deux droites se coupent donne le nombre de départ pour lequel les deux fonctions ont la même image. Avant ce point, la droite la plus basse correspond à l'offre la moins chère.

8. Fonctions linéaires et pourcentages

Les pourcentages sont de la proportionnalité : ils s'écrivent donc avec des fonctions linéaires.

Coefficient multiplicateur

- Une **augmentation de t %** revient à multiplier par **$1 + t/100$** .
- Une **diminution de t %** revient à multiplier par **$1 - t/100$** .

La fonction « appliquer le pourcentage » est donc linéaire, de coefficient le coefficient multiplicateur.

Exemples

- Une hausse de 25 % : $f(x) = 1,25x$. Un abonnement à 12 € passe à $12 \times 1,25 = 15$ €.
- Une baisse de 40 % : $g(x) = 0,6x$. Des baskets à 90 € coûtent $90 \times 0,6 = 54$ €.
- Retrouver le prix avant la baisse de 40 % pour un prix soldé de 45 € : on cherche l'antécédent de 45, donc $0,6x = 45$, $x = 45 \div 0,6 = 75$ €.

Piège

Deux pourcentages ne s'additionnent pas ! Une hausse de 10 % suivie d'une baisse de 10 % ne ramène pas au prix de départ : on multiplie par 1,1 puis par 0,9, ce qui revient à multiplier par 0,99.

À retenir

- Fonction **linéaire** : $f(x) = ax$. Proportionnalité, $f(0) = 0$, $a = \mathbf{f(x)/x}$. Représentation : droite passant par l'origine.
- Fonction **affine** : $f(x) = ax + b$. Représentation : droite d'équation $y = ax + b$.
- a = coefficient directeur (pente) ; b = ordonnée à l'origine = $f(0)$.
- $a > 0$: croissante ; $a < 0$: décroissante ; $a = 0$: constante.
- Image : on remplace x . Antécédent : on résout une équation.
- Pour tracer une droite, deux points suffisent (un seul pour une fonction linéaire, avec l'origine).
- Avec deux points : $a = \mathbf{y_2 - y_1 / x_2 - x_1}$, puis on trouve b .
- Augmenter de t % : multiplier par **$1 + t/100$** ; diminuer de t % : multiplier par **$1 - t/100$** .