

Fonctions polynômes du second degré

Corrigé du contrôle - 1ère

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice interdite.

1 Forme canonique et variations / 4 pts

- a. $\alpha = -12/-6 = 2$ (0,5 pt) ; $\beta = f(2) = -12 + 24 - 5 = 7$ (0,5 pt). Donc **$f(x) = -3(x - 2)^2 + 7$** (0,5 pt pour l'écriture, 0,5 pt pour la justification ou la vérification : $-3(x^2 - 4x + 4) + 7 = -3x^2 + 12x - 5 \checkmark$).
- b. $a = -3 < 0$: f est croissante sur $] -\infty ; 2]$ et décroissante sur $[2 ; +\infty[$ (0,5 pt).
Maximum 7 en $x = 2$ (0,5 pt).

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f(x)		$\nearrow$	7	$\searrow$	

- c. $f(x) = -5 \Leftrightarrow -3x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow -3x(x - 4) = 0$ (0,5 pt) $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 4$. Solutions : **0 et 4** (0,5 pt). On retrouve la symétrie par rapport à $x = 2$.

Barème : a) 2 pts, b) 1 pt, c) 1 pt. Calculatrice autorisée.

2 Trois équations / 3 pts

- a. $\Delta = 9 + 40 = 49$, $\sqrt{\Delta} = 7$ (0,5 pt). $x_1 = 3-7/4 = -1$ et $x_2 = 3+7/4 = 5/2$ (0,5 pt).
Solutions : **-1 et 5/2**. (Racine évidente : $a - b + c = 2 + 3 - 5 = 0$.)
- b. $\Delta = 36 - 36 = 0$ (0,5 pt). Solution double $x_0 = -6/18 = -1/3$ (0,5 pt). (On reconnaît $(3x + 1)^2 = 0$.)
- c. $\Delta = 1 - 16 = -15 < 0$ (0,5 pt) : **aucune solution** dans $\mathbb{R}$ (0,5 pt).

3 Signe et inéquations / 4 pts

- a. $\Delta = 1 + 24 = 25$ (0,5 pt), $\sqrt{\Delta} = 5$. Racines **$-1-5/-2 = 3$** et **$-1+5/-2 = -2$** (1 pt).
Factorisation : **$g(x) = -(x + 2)(x - 3)$** (0,5 pt). Vérification : $-(x^2 - x - 6) = -x^2 + x + 6 \checkmark$.
- b. Comme $a = -1 < 0$, g est négative à l'extérieur des racines (0,5 pt) :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
g(x)		-	0	+	0	-	

Solution de $g(x) < 0$: **$] -\infty ; -2[\cup]3 ; +\infty[$** (0,5 pt).

- c. $g(x) \geq 4 \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 \geq 0$ (0,5 pt). $\Delta = 1 + 8 = 9$, racines **$-1-3/-2 = 2$** et **$-1+3/-2 = -1$** ; $a = -1 < 0$: positif entre les racines. Solution : **$[-1 ; 2]$** (0,5 pt).

Barème : a) 2 pts, b) 1 pt, c) 1 pt.

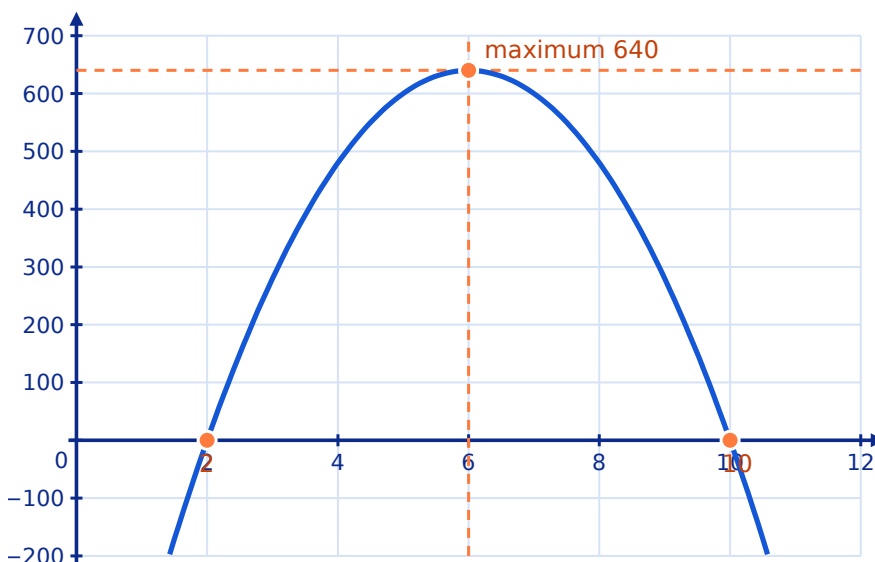
4 Retrouver une parabole / 3 pts

- a. Les racines étant -2 et 1 , $f(x) = a(x + 2)(x - 1)$ (0,5 pt). $f(0) = a \times 2 \times (-1) = -2a = -4$, donc $a = 2$ (0,5 pt). $f(x) = 2(x^2 + x - 2) = \mathbf{2x^2 + 2x - 4}$ (1 pt).
- b. $\alpha = -\mathbf{2/4} = -\mathbf{1/2}$ (0,5 pt) (milieu de -2 et 1 : $-2+1/2$). $\beta = f(-\mathbf{1/2}) = 2 \times \mathbf{1/4} - 1 - 4 = -\mathbf{9/2}$ (0,5 pt). Sommet : **$S(-1/2 ; -9/2)$** , c'est un minimum puisque $a > 0$.

5 Équation bicarrée / 2 pts

Avec $X = x^2$: $X^2 - 13X + 36 = 0$ (0,5 pt). $\Delta = 169 - 144 = 25$, $X = \mathbf{13 \pm 5/2}$, soit $X = 4$ ou $X = 9$ (0,5 pt). Les deux valeurs sont positives : $x^2 = 4$ donne $x = \pm 2$; $x^2 = 9$ donne $x = \pm 3$ (0,5 pt). **$S = \{-3 ; -2 ; 2 ; 3\}$** (0,5 pt).

6 Optimiser le bénéfice d'un pâtissier / 4 pts



- a. Développons : $-40(x - 2)(x - 10) = -40(x^2 - 12x + 20) = -40x^2 + 480x - 800 = B(x)$ ✓ (1 pt). (Ou : $\Delta = 230\,400 - 128\,000 = 102\,400 = 320^2$, racines 2 et 10.)
- b. $a = -40 < 0$: B est positive entre les racines (0,5 pt). Donc $B(x) > 0$ pour **$2 < x < 10$** : le pâtissier gagne de l'argent s'il vend entre 200 et 1 000 crêpes (0,5 pt).
- c. $a < 0$: maximum en $\alpha = -\mathbf{480/-80} = 6$ (le milieu des racines 2 et 10) (1 pt). $B(6) = -40 \times 36 + 480 \times 6 - 800 = -1\,440 + 2\,880 - 800 = 640$ (0,5 pt). **Le bénéfice maximal est de 640 € par jour, obtenu en vendant 600 crêpes** (0,5 pt).

Barème : a) 1 pt, b) 1 pt, c) 2 pts. Durée de l'épreuve : 55 minutes.
Calculatrice autorisée.