

Fonctions polynômes du second degré

Corrigé des exercices - 1ère

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Reconnaître un trinôme ★★★

- f est déjà sous forme développée : c'est un trinôme avec $a = 3$, $b = -5$, $c = 2$.
- $g(x) = x^2 + 4x - x - 4 = x^2 + 3x - 4$: trinôme, $a = 1$, $b = 3$, $c = -4$.
- h contient x^3 : ce n'est pas une fonction du second degré.
- $k(x) = 4x^2 - 4x + 1 - 4x^2 = -4x + 1$. Les termes en x^2 disparaissent : k est affine, **pas** du second degré.
- $m(x) = -x^2 + 7$: trinôme avec $a = -1$, $b = 0$, $c = 7$.

2 Développer une forme factorisée ★★★

- $(x - 1)(x + 3) = x^2 + 3x - x - 3 = x^2 + 2x - 3$, puis $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$.
- $(x + 2)(x - 5) = x^2 - 5x + 2x - 10 = x^2 - 3x - 10$. Le signe « - » devant change tous les signes : $g(x) = -x^2 + 3x + 10$.
- $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$ (identité remarquable), donc $h(x) = 3x^2 - 24x + 48$.

3 Développer une forme canonique ★★★

- $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$; $\times 2$: $2x^2 - 12x + 18$; puis $+ 1$: $f(x) = 2x^2 - 12x + 19$.
- $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$; le signe « - » donne $-x^2 - 2x - 1$; puis $+ 5$: $g(x) = -x^2 - 2x + 4$.

4 Lire le sommet et les variations ★★★

On lit α et β dans $a(x - \alpha)^2 + \beta$, en faisant attention au signe de α .

- $\alpha = 2$, $\beta = -5$: sommet $S(2 ; -5)$. Comme $a = 3 > 0$, f est décroissante sur $] -\infty ; 2]$, croissante sur $[2 ; +\infty[$ et admet un **minimum** -5 , atteint en 2.
- $x + 4 = x - (-4)$, donc $\alpha = -4$, $\beta = 7$: sommet $S(-4 ; 7)$. Comme $a = -1 < 0$, g est croissante sur $] -\infty ; -4]$, décroissante sur $[-4 ; +\infty[$ et admet un **maximum** 7, atteint en -4 .
- $\alpha = -1$, $\beta = -3$: sommet $S(-1 ; -3)$. $a = -2 < 0$: h est croissante sur $] -\infty ; -1]$, décroissante sur $[-1 ; +\infty[$, maximum -3 atteint en -1 .

5 Calculer des discriminants ★★★

- a. $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 36 - 20 = 16 > 0$: deux racines.
- b. $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times 3 = 1 - 24 = -23 < 0$: aucune racine.
- c. $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 9 \times 4 = 144 - 144 = 0$: une racine double.
- d. $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 4 + 12 = 16 > 0$: deux racines.
- e. $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 1 + 24 = 25 > 0$: deux racines.

6 Résoudre trois équations ★★★

- a. $\Delta = 16$ (exercice précédent), $\sqrt{\Delta} = 4$. $x_1 = \mathbf{6-4/2} = 1$ et $x_2 = \mathbf{6+4/2} = 5$. Solutions : **1 et 5**.
- b. $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 49 - 24 = 25$, $\sqrt{\Delta} = 5$. $x_1 = \mathbf{7-5/4} = \mathbf{1/2}$ et $x_2 = \mathbf{7+5/4} = 3$. Solutions : **1/2 et 3**.
- c. $\Delta = 16 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = -4 < 0$: **aucune solution** réelle.

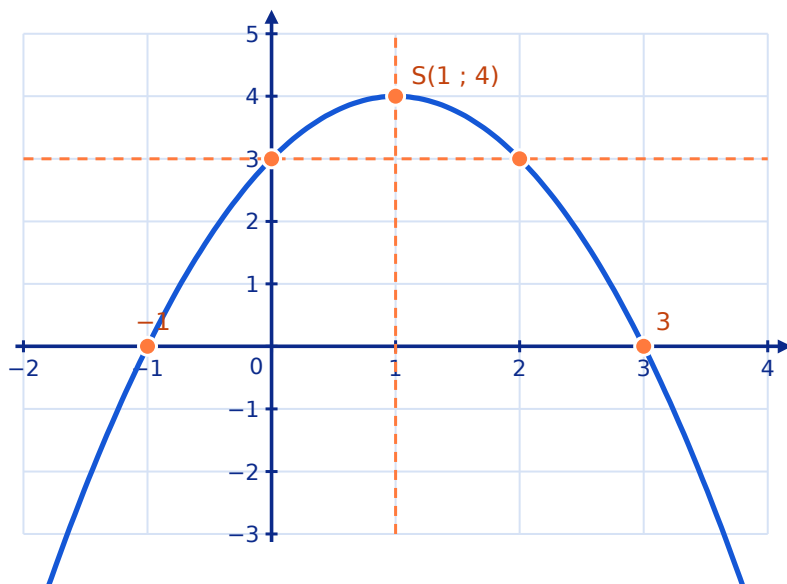
7 Racines évidentes ★★★

- a. $a + b + c = 1 - 7 + 6 = 0$: 1 est racine. Le produit des racines vaut $\mathbf{c/a} = 6$, donc l'autre racine est 6. Contrôle : $1 + 6 = 7 = \mathbf{-b/a}$ ✓.
- b. $a - b + c = 3 - 5 + 2 = 0$: -1 est racine. Le produit vaut $\mathbf{2/3}$, donc l'autre racine est $\mathbf{2/3 \div (-1) = -2/3}$. Contrôle de la somme : $-1 - \mathbf{2/3} = \mathbf{-5/3} = \mathbf{-5/3}$ ✓.

8 Vrai ou faux ? ★★★

- a. **Faux**. Si $a > 0$, la parabole est ouverte vers le haut : il y a un **minimum**, pas de maximum (la fonction carré tend vers $+\infty$).
- b. **Faux**. $x^2 = -1$ est impossible dans $\mathbb{R}$. $\Delta = 0 - 4 = -4 < 0$.
- c. **Vrai**. $2x^2 - 4x + 2 = 2(x - 1)^2$, un carré multiplié par 2 : toujours positif ou nul ($\Delta = 0$).
- d. **Faux**. Contre-exemple : $x^2 - x - 2$ a $\Delta = 9 > 0$ et pour racines -1 et 2, de signes contraires (produit = $-2 < 0$).
- e. **Faux**. $-3(x + 2)^2 + 1 = -3(x - (-2))^2 + 1$: $\alpha = -2$, le sommet est $S(-2 ; 1)$.
- f. **Vrai**. $\Delta = 36 - 40 = -4 < 0$ et $a = 1 > 0$: le trinôme est du signe de a , donc strictement positif. (Aussi : $x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 + 1 > 0$.)

9 Lecture graphique d'une parabole ★★★



- La courbe coupe l'axe des abscisses en $x = -1$ et $x = 3$: les racines sont **-1 et 3**. Le sommet est $S(1 ; 4)$.
- La parabole est ouverte vers le bas : $a < 0$, donc f admet un **maximum**, égal à 4, atteint en 1.
- $f(x) > 0$ quand la courbe est au-dessus de l'axe : **$]-1 ; 3[$** . $f(x) \leq 0$ pour $x \in [-2 ; -1] \cup [3 ; 4]$.
- On regarde où la courbe rencontre la droite horizontale $y = 3$: en $x = 0$ et $x = 2$ (symétriques par rapport à l'axe $x = 1$). Solutions : **0 et 2**.
- Comme $|a| = 1$ et $a < 0$, $a = -1$, $\alpha = 1$, $\beta = 4$: $f(x) = -(x - 1)^2 + 4$. Vérification : $f(0) = -1 + 4 = 3 \checkmark$ (la courbe passe par $(0 ; 3)$).

10 Forme canonique de quatre trinômes ★★★

- $\alpha = 8/2 = 4$, $\beta = 16 - 32 + 3 = -13$. Forme canonique : **$(x - 4)^2 - 13$** .
- $\alpha = -8/4 = -2$, $\beta = 2 \times 4 - 16 - 1 = -9$. Forme canonique : **$2(x + 2)^2 - 9$** .
- $\alpha = -6/-6 = 1$, $\beta = -3 + 6 + 4 = 7$. Forme canonique : **$-3(x - 1)^2 + 7$** .
- $\alpha = -3/2$, $\beta = 9/4 - 9/2 = -9/4$. Forme canonique : **$(x + 3/2)^2 - 9/4$** .

Chaque résultat peut être contrôlé en développant : par exemple $2(x + 2)^2 - 9 = 2x^2 + 8x + 8 - 9 = 2x^2 + 8x - 1 \checkmark$.

11 Résoudre quatre équations ★★★

- $\Delta = 4 + 12 = 16$, $\sqrt{\Delta} = 4$. $x_1 = 2 - 4/6 = -1/3$ et $x_2 = 2 + 4/6 = 1$.
- $\Delta = 4 + 4 = 8 = 4 \times 2$, $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$. $x_1 = 2 - 2\sqrt{2}/2 = 1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{2}$ ($\approx -0,41$ et $2,41$).
- $\Delta = 400 - 400 = 0$: solution double $x_0 = 20/8 = 5/2$. (On reconnaît $(2x - 5)^2 = 0$.)
- $\Delta = 9 - 4 \times (-2) \times (-5) = 9 - 40 = -31 < 0$: aucune solution réelle.

12 Factoriser des trinômes ★★★

- a. $\Delta = 1 + 80 = 81$, $\sqrt{\Delta} = 9$. Racines $\mathbf{1-9/4 = -2}$ et $\mathbf{1+9/4 = 5/2}$. Donc $2x^2 - x - 10 = 2(x + 2)(x - \mathbf{5/2}) = \mathbf{(x + 2)(2x - 5)}$. Vérification : $2x^2 - 5x + 4x - 10 \checkmark$.
- b. $\Delta = 100 - 100 = 0$, racine double 5 : $x^2 - 10x + 25 = \mathbf{(x - 5)^2}$.
- c. $\Delta = 144 - 108 = 36$, $\sqrt{\Delta} = 6$. Racines $\mathbf{-12-6/-6 = 3}$ et $\mathbf{-12+6/-6 = 1}$. Donc $-3x^2 + 12x - 9 = \mathbf{-3(x - 1)(x - 3)}$. Vérification : $-3(x^2 - 4x + 3) = -3x^2 + 12x - 9 \checkmark$.

13 Variations et extremum ★★★

- a. $\alpha = \mathbf{-8/-4 = 2}$, $\beta = f(2) = -8 + 16 - 3 = 5$. Donc $\mathbf{f(x) = -2(x - 2)^2 + 5}$.
- b. $a = -2 < 0$: f est croissante sur $]-\infty ; 2]$ et décroissante sur $[2 ; +\infty[$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	5	$\searrow$	

- c. Sur $[0 ; 3]$, 2 est dans l'intervalle : le **maximum** est $f(2) = 5$. f est croissante sur $[0 ; 2]$ puis décroissante sur $[2 ; 3]$, donc le minimum est la plus petite des valeurs aux bornes : $f(0) = -3$ et $f(3) = -18 + 24 - 3 = 3$. Le **minimum** est -3 , atteint en $x = 0$.

14 Signe de trois trinômes ★★★

- a. $\Delta = 4 + 12 = 16$, racines $\mathbf{2-4/2 = -1}$ et $\mathbf{2+4/2 = 3}$. $a = 1 > 0$:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- b. $\Delta = 16 - 16 = 0$, racine double 2. $a = -1 < 0$: le trinôme est négatif partout sauf en 2 où il s'annule ($-x^2 + 4x - 4 = -(x - 2)^2$).

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-x^2 + 4x - 4$		$-$	0	$-$	

- c. $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$ et $a = 2 > 0$: le trinôme est strictement positif pour tout réel x , il ne s'annule jamais.

15 Résoudre des inéquations ★★★

- a. Racines 2 et 3 ($\Delta = 25 - 24 = 1$). $a = 1 > 0$: positif à l'extérieur des racines. Solution : $\mathbf{]-\infty ; 2[\cup]3 ; +\infty[}$ (crochets ouverts car l'inégalité est stricte).
- b. $\Delta = 1 + 8 = 9$, racines $\mathbf{-1-3/-4 = 1}$ et $\mathbf{-1+3/-4 = -1/2}$. $a = -2 < 0$: positif **entre** les racines. Solution : $\mathbf{[-1/2 ; 1]}$.
- c. $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$ et $a > 0$: le trinôme est toujours strictement positif. Aucune solution : $\emptyset$.

- d. $3x^2 \geq 12 \Leftrightarrow 3x^2 - 12 \geq 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 4) \geq 0 \Leftrightarrow 3(x - 2)(x + 2) \geq 0$. Racines -2 et 2 , $a = 3 > 0$: solution $]-\infty ; -2] \cup [2 ; +\infty[$.

16 Somme et produit : le rectangle ★★★

- a. Le demi-périmètre est $26 \div 2 = 13$: longueur + largeur = 13 ; longueur $\times$ largeur = 40.
- b. Les deux dimensions sont les racines de $t^2 - 13t + 40 = 0$. $\Delta = 169 - 160 = 9$, $\sqrt{\Delta} = 3$, $t = 13 \pm 3/2$, soit $t = 5$ ou $t = 8$. **Le rectangle mesure 8 cm sur 5 cm** (contrôle : $8 \times 5 = 40$, $2 \times (8 + 5) = 26$).
- c. On résout $t^2 - 13t + 50 = 0$: $\Delta = 169 - 200 = -31 < 0$. Il n'y a pas de solution : **un tel rectangle n'existe pas** (l'aire maximale à périmètre donné est celle du carré de côté 6,5 cm, soit 42,25 cm²).

17 Retrouver une fonction ★★★

- a. Les racines sont -1 et 2 , donc $f(x) = a(x + 1)(x - 2)$. La courbe passe par C : $f(0) = a \times 1 \times (-2) = -2a = 4$, donc **$a = -2$** et $f(x) = -2(x + 1)(x - 2)$.
- b. $(x + 1)(x - 2) = x^2 - x - 2$, donc $f(x) = -2x^2 + 2x + 4$.
- c. $\alpha = -2/-4 = 1/2$ (c'est aussi le milieu de $[-1 ; 2]$). $\beta = f(1/2) = -2 \times 1/4 + 1 + 4 = 9/2$. Le sommet est **S(1/2 ; 9/2)**, c'est un maximum puisque $a < 0$.

18 Deux carrés sur un segment ★★★

- a. $AM = x$ et $MB = 10 - x$. $S(x) = x^2 + (10 - x)^2 = x^2 + 100 - 20x + x^2 = 2x^2 - 20x + 100$.
- b. $a = 2 > 0$: la fonction admet un minimum en $\alpha = 20/4 = 5$, qui est bien dans $[0 ; 10]$. $S(5) = 2 \times 25 - 100 + 100 = 50$. **Le minimum est 50 cm², quand M est le milieu de [AB]** (deux carrés de côté 5 cm).
- c. $S(x) = 68 \Leftrightarrow 2x^2 - 20x + 100 = 68 \Leftrightarrow 2x^2 - 20x + 32 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 = 0$. $\Delta = 100 - 64 = 36$, $x = 10 \pm 6/2$, soit $x = 2$ ou $x = 8$. Contrôle : $2^2 + 8^2 = 4 + 64 = 68$ ✓. **M est à 2 cm de A, ou à 8 cm de A** (c'est-à-dire à 2 cm de B).

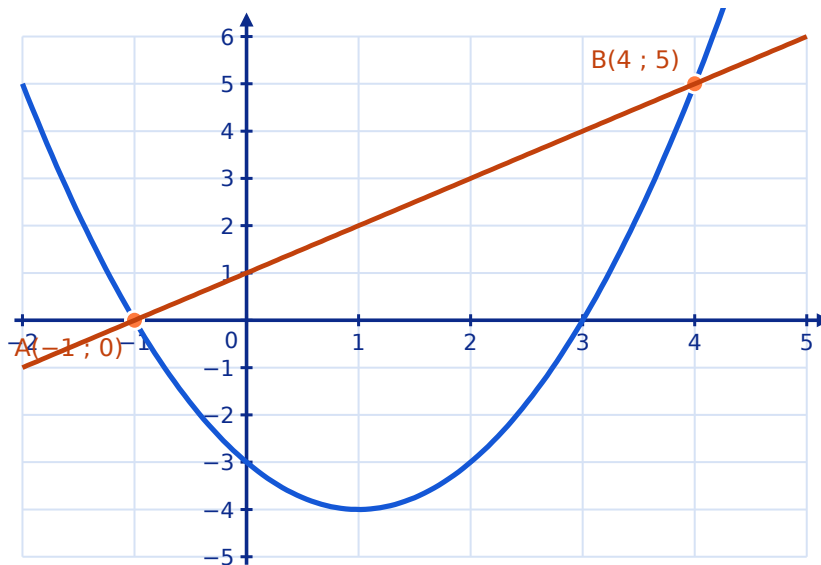
19 Un paramètre dans l'équation ★★★

- a. Ici $a = 1$, $b = m$, $c = 9$: $\Delta = m^2 - 36$.
- b. Une unique solution équivaut à $\Delta = 0$: $m^2 = 36$, donc **$m = 6$ ou $m = -6$** . Pour $m = 6$, la solution est $x_0 = -6/2 = -3$ (et $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$). Pour $m = -6$, $x_0 = 3$.
- c. Aucune solution : $\Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 < 36 \Leftrightarrow -6 < m < 6$. Deux solutions : $\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 > 36 \Leftrightarrow m < -6$ ou $m > 6$ ($m \in]-\infty ; -6[\cup]6 ; +\infty[$).
- d. $x^2 + 10x + 9 = 0$: $\Delta = 100 - 36 = 64$, $\sqrt{\Delta} = 8$, $x = -10 \pm 8/2$, soit **-1 et -9** . Contrôle : produit $9 = c$ ✓, somme $-10 = -m$ ✓.

20 Équations bicarrées ★★★

- $X^2 - 10X + 9 = 0 : \Delta = 100 - 36 = 64, X = \mathbf{10 \pm 8/2}$, soit $X = 1$ ou $X = 9$. Les deux sont positifs : $x^2 = 1$ donne $x = \pm 1$; $x^2 = 9$ donne $x = \pm 3$. **$S = \{-3 ; -1 ; 1 ; 3\}$.**
- $X^2 + 3X - 4 = 0 : \Delta = 9 + 16 = 25, X = \mathbf{-3 \pm 5/2}$, soit $X = 1$ ou $X = -4$. $X = -4$ est rejeté (un carré ne peut pas être négatif). Il reste $x^2 = 1 : S = \{-1 ; 1\}$.
- $X^2 + X + 1 = 0 : \Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, pas de valeur de X . **Aucune solution réelle** (d'ailleurs $x^4 + x^2 + 1 \geq 1 > 0$).

21 Parabole et droite ★★★



- On résout $x^2 - 2x - 3 = x + 1$, soit $x^2 - 3x - 4 = 0$. $\Delta = 9 + 16 = 25, x = \mathbf{3 \pm 5/2}$, donc $x = -1$ ou $x = 4$. Ordonnées : $y = -1 + 1 = 0$ et $y = 4 + 1 = 5$. Points d'intersection : **$A(-1 ; 0)$ et $B(4 ; 5)$** . Vérification avec la parabole : $(-1)^2 + 2 - 3 = 0 \checkmark ; 16 - 8 - 3 = 5 \checkmark$.
- Le signe de $(x^2 - 2x - 3) - (x + 1) = x^2 - 3x - 4$ donne la position. Ce trinôme a pour racines -1 et 4 et $a = 1 > 0$: il est positif pour $x < -1$ ou $x > 4$, négatif entre -1 et 4 . Donc (P) est **au-dessus** de (d) sur $]-\infty ; -1[\cup]4 ; +\infty[$ et **au-dessous** de (d) sur $]-1 ; 4[$.
- $x^2 - 2x - 3 = -4 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$ ($\Delta = 0$) : un seul point commun, $S(1 ; -4)$, qui est le sommet : la droite $y = -4$ est **tangente** à (P). Pour $y = -5 : x^2 - 2x + 2 = 0, \Delta = 4 - 8 = -4 < 0$: la droite est **extérieure** (sous le minimum -4).

22 L'enclos de 60 mètres ★★★

- Les deux côtés perpendiculaires utilisent $2x$ mètres de grillage. Il reste $60 - 2x$ pour le côté parallèle au mur. Il faut $x > 0$ et $60 - 2x > 0$, donc **$0 < x < 30$** .
- $A(x) = x(60 - 2x) = \mathbf{-2x^2 + 60x}$.
- $a = -2 < 0$: maximum en $\alpha = \mathbf{-60/-4 = 15}$ (dans $]0 ; 30[$). $A(15) = 15 \times 30 =$

450. **L'aire maximale est 450 m²**, pour un enclos de 15 m sur 30 m.

- d. $-2x^2 + 60x = 400 \Leftrightarrow -2x^2 + 60x - 400 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 30x + 200 = 0$. $\Delta = 900 - 800 = 100$, $x = 30 \pm 10/2$, soit $x = 10$ ou $x = 20$. Deux enclos possibles : 10 m sur 40 m ($10 \times 40 = 400$), ou 20 m sur 20 m ($20 \times 20 = 400$).

23 Le lancer de balle ★★★

- a. $a = -5 < 0$: maximum en $t = -20/-10 = 2$ s. $h(2) = -20 + 40 + 1,5 = 21,5$.
Hauteur maximale : 21,5 m, à t = 2 s.
- b. On résout $h(t) = 0$: $\Delta = 400 - 4 \times (-5) \times 1,5 = 400 + 30 = 430$. $t = -20 \pm \sqrt{430}/-10$. La solution positive est $t = -20 - \sqrt{430}/-10 = 2 + \sqrt{430}/10 \approx 2 + 2,07 = 4,07$ (l'autre, $2 - 2,07 \approx -0,07$, est négative : rejetée). **La balle touche le sol au bout d'environ 4,07 s.**
- c. $h(t) \geq 16,5 \Leftrightarrow -5t^2 + 20t - 15 \geq 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 \leq 0$ (on divise par -5 , ce qui renverse l'inégalité). Racines 1 et 3 ($\Delta = 16 - 12 = 4$) ; le trinôme est négatif entre les racines : $t \in [1 ; 3]$. **La balle reste à plus de 16,5 m pendant 2 secondes**, de $t = 1$ s à $t = 3$ s.

24 Le bénéfice d'une entreprise ★★★

- a. $\Delta = 784 - 4 \times (-2) \times (-66) = 784 - 528 = 256$, $\sqrt{\Delta} = 16$. Racines $-28-16/-4 = 11$ et $-28+16/-4 = 3$. Donc $B(x) = -2(x - 3)(x - 11)$. (Développement : $-2(x^2 - 14x + 33) = -2x^2 + 28x - 66$ ✓.)
- b. $B(x) > 0 \Leftrightarrow x$ entre les racines (car $a < 0$) $\Leftrightarrow 3 < x < 11$: le bénéfice est positif pour une production comprise entre 300 et 1 100 objets.
- c. $\alpha = -28/-4 = 7$ et $B(7) = -98 + 196 - 66 = 32$. **Le bénéfice maximal est de 32 000 €, pour 700 objets.**
- d. $B(x) \geq 20 \Leftrightarrow -2x^2 + 28x - 86 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 14x + 43 \leq 0$. $\Delta = 196 - 172 = 24$, $\sqrt{24} = 2\sqrt{6} \approx 4,90$, racines $14 \pm 2\sqrt{6}/2 = 7 \pm \sqrt{6} \approx 4,55$ et $9,45$. Le trinôme est négatif entre les racines : $x \in [7 - \sqrt{6} ; 7 + \sqrt{6}] \approx [4,55 ; 9,45]$, soit entre environ 455 et 945 objets.

25 Démontrer des inégalités ★★★

- a. Le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ et $a = 1 > 0$. Le trinôme est donc du signe de a pour tout réel x : $x^2 - x + 1 > 0$.
- b. $x^2 - x + 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 > x$ (on ajoute x aux deux membres). C'est vrai pour tout réel x .
- c. $x + 1/x - 2 = x^2 + 1 - 2x/x = (x-1)^2/x$. Pour $x > 0$, le numérateur $(x-1)^2$ est positif ou nul et le dénominateur est strictement positif : le quotient est positif ou nul. Donc $x + 1/x \geq 2$, avec égalité seulement pour $x = 1$.

26 Combien de solutions selon k ? ★★★

- a. $\alpha = 4/2 = 2$, $\beta = f(2) = 4 - 8 + 1 = -3$. Comme $a = 1 > 0$, le minimum de f est **-3**, atteint en 2.
- b. $x^2 - 4x + 1 = k \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 - k = 0$. $\Delta = 16 - 4(1 - k) = 12 + 4k = \mathbf{4(k + 3)}$.
- c. • Si $k > -3$: $\Delta > 0$, deux solutions.
• Si $k = -3$: $\Delta = 0$, une solution ($x = 2$).
• Si $k < -3$: $\Delta < 0$, aucune solution.

Graphiquement : la droite horizontale d'équation $y = k$ coupe la parabole en deux points si elle est au-dessus du sommet, la touche au sommet $S(2 ; -3)$, et ne la rencontre pas si elle est en dessous.

- d. Pour $k = 6$: $x^2 - 4x - 5 = 0$, $\Delta = 16 + 20 = 36$, $x = \mathbf{4 \pm 6/2}$, soit **$x = -1$ ou $x = 5$** .
Contrôle : $f(-1) = 1 + 4 + 1 = 6 \checkmark$ et $f(5) = 25 - 20 + 1 = 6 \checkmark$.