

Fonctions polynômes du second degré

Cours de maths - 1ère

Quand tu lances un ballon, la hauteur qu'il atteint dessine une courbe en forme d'arche : une **parabole**. Quand un commerçant cherche le prix qui lui rapporte le plus, ou qu'un jardinier veut le plus grand enclos possible avec une longueur de grillage donnée, la même famille de fonctions apparaît : les **fonctions polynômes du second degré**. En 1ère, tu apprends à les écrire sous trois formes, à calculer leurs racines avec le **discriminant**, à trouver leur signe, leurs variations et leur **sommet**, et à t'en servir pour résoudre des équations, des inéquations et des problèmes d'optimisation.

1. Fonction polynôme du second degré et ses trois formes

Fonction polynôme du second degré (trinôme) Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une **fonction polynôme du second degré** s'il existe trois réels a, b, c , avec $a \neq 0$, tels que, pour tout réel x :

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

L'expression $ax^2 + bx + c$ s'appelle un **trinôme du second degré**. Sa courbe représentative est une **parabole**.

La condition $a \neq 0$ est essentielle : si $a = 0$, il ne reste que $bx + c$, une fonction affine. Les nombres b et c , eux, peuvent être nuls : $f(x) = -3x^2 + 7$ et $g(x) = 5x^2 - 2x$ sont bien du second degré.

Reconnaître un trinôme • $(x - 2)(x + 5) = x^2 + 3x - 10$: c'est un trinôme, avec $a = 1, b = 3, c = -10$.

• $(3x + 1)^2 - 9x^2 = 6x + 1$: **pas** un trinôme, les termes en x^2 se sont éliminés. Il faut développer avant de conclure.

• $x^3 + x^2$: pas un trinôme, le plus grand exposant est 3.

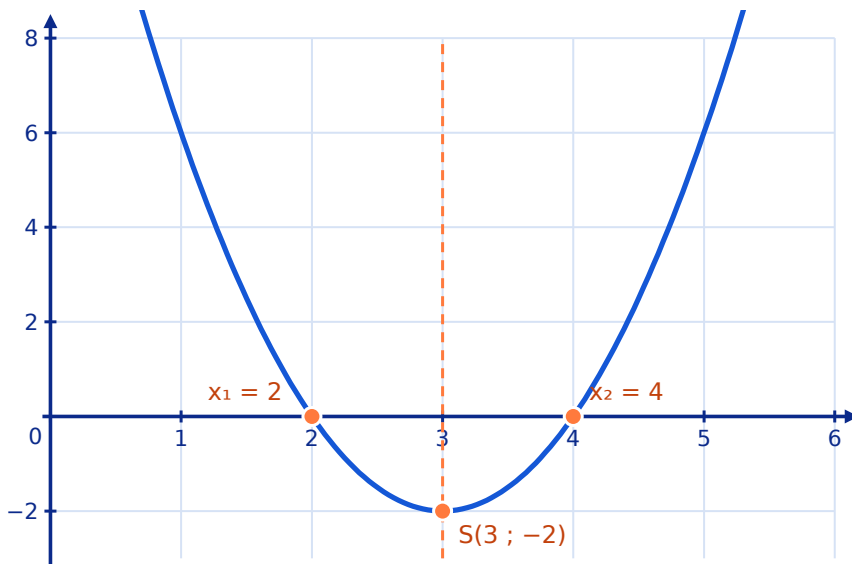
Un même trinôme peut s'écrire de trois façons. Prenons $f(x) = 2x^2 - 12x + 16$.

Forme	Écriture	Ce qu'elle montre
Développée	$2x^2 - 12x + 16$	l'ordonnée à l'origine : $f(0) = 16$, et le signe de a
Factorisée	$2(x - 2)(x - 4)$	les racines : 2 et 4 (là où la courbe coupe l'axe des abscisses)
Canonique	$2(x - 3)^2 - 2$	le sommet $S(3 ; -2)$ et les variations

Chaque forme répond à une question différente. Savoir passer de l'une à l'autre est la compétence centrale du chapitre. Voici la parabole de cette fonction, dont on lit les trois

Fiche en ligne : maths-facile.eu/fonctions-polynomes-du-second-degre-cours-1ere/ · Cours, exercices et contrôles

informations : sommet, racines, symétrie.



La parabole de $f(x) = 2x^2 - 12x + 16$: sommet $S(3 ; -2)$, racines 2 et 4, axe de symétrie $x = 3$ (pointillés).

Piège : toutes les fonctions n'ont pas de forme factorisée La forme factorisée avec des facteurs du premier degré n'existe que si la parabole **coupe** l'axe des abscisses. La fonction $g(x) = x^2 + 1$ n'en a pas (on le démontrera avec le discriminant). La forme canonique, elle, existe **toujours**.

2. La forme canonique

Forme canonique Pour tout trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$), il existe deux réels α et β tels que, pour tout réel x :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta, \text{ avec } \alpha = -b/2a \text{ et } \beta = f(\alpha).$$

Cette écriture est la **forme canonique** de f .

Démonstration On met a en facteur : $ax^2 + bx + c = a[x^2 + b/ax + c/a]$.

Les deux premiers termes ressemblent au début de $(x + b/2a)^2 = x^2 + b/ax + b^2/4a^2$. On écrit donc $x^2 + b/ax = (x + b/2a)^2 - b^2/4a^2$.

Ainsi $f(x) = a[(x + b/2a)^2 - b^2/4a^2 + c/a] = a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = -b/2a$ et $\beta = c - b^2/4a$.

Enfin, en prenant $x = \alpha$, le terme $a(x - \alpha)^2$ s'annule, donc $f(\alpha) = \beta$.

Mettre un trinôme sous forme canonique 1) Repère a , b , c .

2) Calcule $\alpha = -b/2a$.

3) Calcule $\beta = f(\alpha)$ en remplaçant x par α dans l'expression de départ.

4) Écris $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

5) Vérifie en développant, ou en testant avec $x = 0$: on doit retrouver c .

Exemple 1 $f(x) = 3x^2 - 12x + 7$. Ici $a = 3$, $b = -12$, $c = 7$.

$$\alpha = -(-12)/2 \times 3 = 12/6 = 2. \quad \beta = f(2) = 3 \times 4 - 24 + 7 = -5.$$

Donc $f(x) = 3(x - 2)^2 - 5$. Vérification : $3(x^2 - 4x + 4) - 5 = 3x^2 - 12x + 7$. ✓

Exemple 2 : avec des fractions $g(x) = -2x^2 + 3x + 1$. Ici $a = -2$, $b = 3$, $c = 1$.

$$\alpha = -3/-4 = 3/4. \quad \beta = g(3/4) = -2 \times 9/16 + 9/4 + 1 = -9/8 + 18/8 + 8/8 = 17/8.$$

Donc $g(x) = -2(x - 3/4)^2 + 17/8$.

Piège : le signe de α La forme canonique contient $(x - \alpha)$. Si $\alpha = -3$, on écrit $(x - (-3))^2 = (x + 3)^2$. Beaucoup d'élèves lisent $\alpha = 3$ au lieu de $\alpha = -3$: le sommet est alors du mauvais côté de l'axe vertical. Autre erreur classique : oublier le facteur a devant la parenthèse.

3. Variations, sommet et axe de symétrie

Variations d'un trinôme Soit $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

- Si $a > 0$: f est décroissante sur $]-\infty ; \alpha]$, croissante sur $[\alpha ; +\infty[$ et admet un **minimum** β atteint en α .
- Si $a < 0$: f est croissante sur $]-\infty ; \alpha]$, décroissante sur $[\alpha ; +\infty[$ et admet un **maximum** β atteint en α .

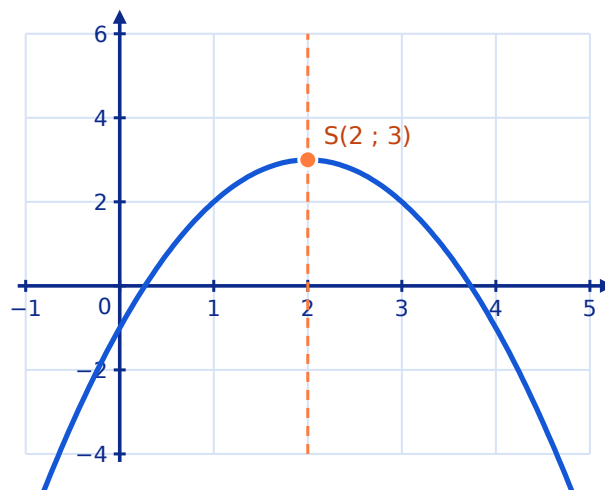
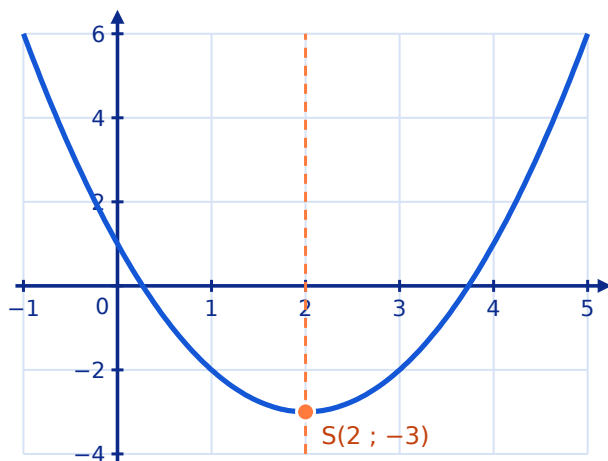
Le point $S(\alpha ; \beta)$ est le **sommet** de la parabole. La droite d'équation $x = \alpha$ est son **axe de symétrie**.

Démonstration (cas $a > 0$) Pour tout réel x , $(x - \alpha)^2 \geq 0$, donc $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \geq \beta$, avec égalité seulement si $x = \alpha$: β est le minimum.

Si $\alpha \leq u < v$, alors $0 \leq u - \alpha < v - \alpha$, donc $(u - \alpha)^2 < (v - \alpha)^2$ (le carré est croissant sur $[0 ; +\infty[$), puis, en multipliant par $a > 0$ et en ajoutant β : $f(u) < f(v)$. Même raisonnement sur $]-\infty ; \alpha]$ avec une décroissance. Pour $a < 0$, on multiplie par un négatif : toutes les inégalités s'inversent.

Symétrie : $f(\alpha + h) = ah^2 + \beta = f(\alpha - h)$, donc deux points d'abscisses symétriques par rapport à α ont la même image.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$a > 0$		↘	β (minimum)	↗	
$a < 0$		↗	β (maximum)	↘	



À gauche, $a = 1 > 0$: la parabole est ouverte vers le haut. À droite, $a = -1 < 0$: elle est ouverte vers le bas.

Exemple Pour $g(x) = -2x^2 + 3x + 1$, on a trouvé $\alpha = 3/4$ et $\beta = 17/8$. Comme $a = -2 < 0$, g est croissante sur $]-\infty ; 3/4]$, décroissante sur $[3/4 ; +\infty[$ et son maximum est $17/8 = 2,125$, atteint en $x = 0,75$.

Retrouver α sans la forme canonique Si tu connais deux racines x_1 et x_2 , l'axe de symétrie est au milieu : $\alpha = (x_1 + x_2)/2$. Pour $f(x) = 2x^2 - 12x + 16$ de racines 2 et 4, on retrouve $\alpha = 3$.

4. Équation du second degré et discriminant

Résoudre $ax^2 + bx + c = 0$, c'est chercher les **racines** du trinôme, c'est-à-dire les abscisses des points où la parabole coupe l'axe des abscisses.

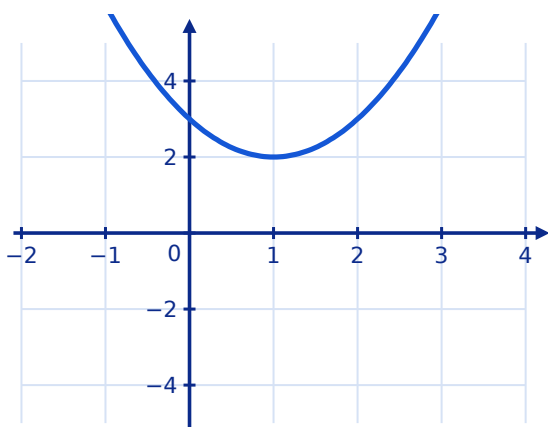
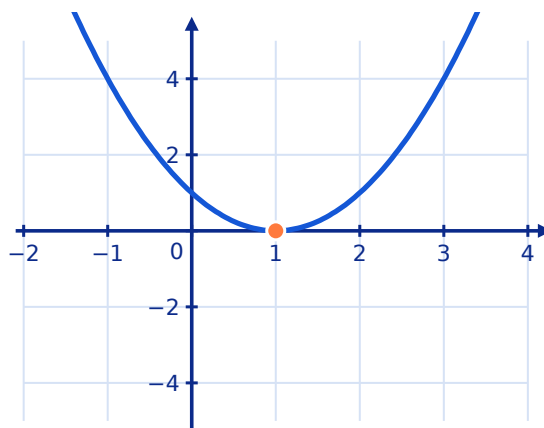
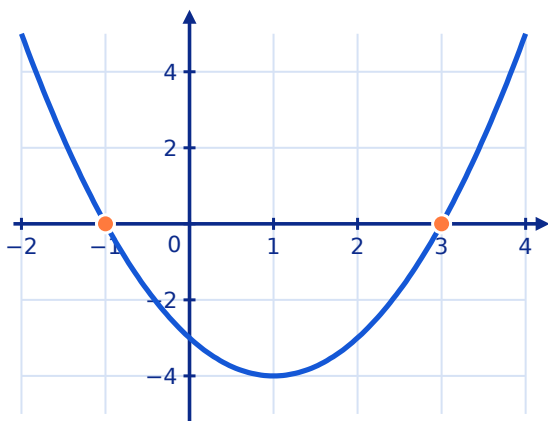
Discriminant Le **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$ est le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$ • Si $\Delta > 0$: deux solutions distinctes, $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

- Si $\Delta = 0$: une seule solution (dite double), $x_0 = \frac{-b}{2a} = \alpha$.
- Si $\Delta < 0$: aucune solution réelle.

Démonstration D'après la forme canonique, $ax^2 + bx + c = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$ (car $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$). Comme $a \neq 0$, l'équation équivaut à $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$.

- Si $\Delta < 0$, le carré d'un réel ne peut pas être négatif : aucune solution.
- Si $\Delta = 0$, on a $(x + \frac{b}{2a})^2 = 0$, donc $x = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, on a $x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$ (en écrivant $\frac{\Delta}{4a^2} = ([\frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}])^2$), d'où les deux solutions annoncées.



Ici $a > 0$ pour les trois courbes : $\Delta > 0$ (deux points d'intersection), $\Delta = 0$ (un point de contact, le sommet), $\Delta < 0$ (aucun point).

Résoudre une équation du second degré 1) Mets l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ (tout à gauche, 0 à droite).

2) Identifie a , b , c avec leurs signes.

3) Calcule $\Delta = b^2 - 4ac$.

4) Selon le signe de Δ , applique la bonne formule (ou conclus qu'il n'y a pas de solution).

5) Vérifie une solution en la remplaçant dans l'équation.

Trois cas • $2x^2 - 5x - 3 = 0$: $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 > 0$, $\sqrt{\Delta} = 7$. $x_1 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{5+7}{4} = 3$. Vérification : $2 \times 9 - 15 - 3 = 0$. ✓

• $4x^2 + 12x + 9 = 0$: $\Delta = 144 - 4 \times 4 \times 9 = 0$. Solution double $x_0 = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$.

• $x^2 + x + 3 = 0$: $\Delta = 1 - 12 = -11 < 0$. Aucune solution réelle : la parabole reste au-dessus de l'axe des abscisses.

Piège : les signes dans Δ Dans $b^2 - 4ac$, le terme b^2 est toujours positif, même si b est négatif ($(-5)^2 = 25$, pas -25). Et $-4ac$ change de signe quand a et c sont de signes contraires, ce qui augmente Δ : un trinôme avec $a > 0$ et $c < 0$ a donc toujours deux racines. Pense aussi à diviser par $2a$ en entier : le dénominateur est $2a$, pas seulement 2.

5. Factorisation, racine évidente, somme et produit

Factorisation Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta > 0$, de racines x_1 et x_2 : **$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$** .
- Si $\Delta = 0$, de racine double x_0 : **$f(x) = a(x - x_0)^2$** .
- Si $\Delta < 0$: $f(x)$ ne se factorise pas en produit de facteurs du premier degré.

Pour le cas $\Delta > 0$, on part de $f(x) = a[(x - \alpha)^2 - \Delta/4a^2]$ et on reconnaît une différence de deux carrés, $(x - \alpha)^2 - (\sqrt{\Delta/2a})^2 = (x - \alpha - \sqrt{\Delta/2a})(x - \alpha + \sqrt{\Delta/2a}) = (x - x_2)(x - x_1)$.

Somme et produit des racines Si $\Delta \geq 0$, les racines x_1 et x_2 (éventuellement égales) vérifient :

$$x_1 + x_2 = -b/a \text{ et } x_1 \times x_2 = c/a.$$

On le voit en développant $a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$ et en identifiant avec $ax^2 + bx + c$.

Chercher une racine évidente • Si $a + b + c = 0$, alors **1** est racine, et l'autre racine vaut **c/a** (le produit des racines).

• Si $a - b + c = 0$, alors **-1** est racine, et l'autre vaut **$-c/a$** .

Cela évite le calcul du discriminant.

Exemples • $5x^2 - 8x + 3$: $5 - 8 + 3 = 0$, donc 1 est racine et l'autre racine est **3/5**.

Somme : $1 + 3/5 = 8/5 = -b/a \checkmark$.

• $2x^2 + 7x + 5$: $2 - 7 + 5 = 0$, donc -1 est racine et l'autre est **-5/2**. On factorise : $2(x + 1)(x + 5/2) = (x + 1)(2x + 5)$.

• Deux nombres de somme 7 et de produit 12 sont les racines de $t^2 - 7t + 12 = 0$: $\Delta = 49 - 48 = 1$, $t = 7 \pm 1/2$, soit 3 et 4.

6. Signe d'un trinôme

Signe de $ax^2 + bx + c$ • Si $\Delta > 0$: le trinôme est du **signe de a à l'extérieur** des racines, du **signe de $-a$ entre** les racines, et nul en x_1 et x_2 .

• Si $\Delta = 0$: il est du signe de a pour tout $x \neq x_0$, et nul en x_0 .

• Si $\Delta < 0$: il est du signe de a pour tout réel x , et ne s'annule jamais.

Justification : pour $\Delta > 0$, on écrit $a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 < x_2$. Entre les racines, les deux facteurs $(x - x_1)$ et $(x - x_2)$ sont de signes contraires, leur produit est négatif et on multiplie par a . À l'extérieur, ils ont le même signe, produit positif. Pour $\Delta < 0$, la forme canonique donne $a[(x - \alpha)^2 + \text{un nombre strictement positif}]$, toujours du signe de a .

Tableaux de signes (cas $\Delta > 0$) :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
si $a > 0$		+	0	-	0	+	

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
si $a < 0$		-	0	+	0	-	

Dresser le tableau de signes d'un trinôme 1) Calcule Δ .

2) Si $\Delta > 0$ (ou $= 0$), calcule les racines et range-les dans l'ordre croissant.

3) Regarde le signe de a pour choisir le bon tableau.

4) Contrôle avec une valeur simple : le signe de $f(0) = c$ doit être cohérent avec le tableau.

Exemple $f(x) = -2x^2 + x + 6$. $\Delta = 1 + 48 = 49$, $\sqrt{\Delta} = 7$. $x_1 = -1+7/-4 = -3/2$ et $x_2 = -1-7/-4 = 2$. Ici $a = -2 < 0$:

x	$-\infty$		$-3/2$		2		$+\infty$
f(x)		-	0	+	0	-	

Contrôle : $f(0) = 6 > 0$ et 0 est bien entre $-1,5$ et 2, là où le trinôme est positif. ✓

7. Inéquations du second degré

Résoudre une inéquation du second degré 1) Ramène tout dans un seul membre pour obtenir $ax^2 + bx + c$ comparé à 0 (attention à bien changer les signes en passant un terme de l'autre côté).

2) Détermine le signe du trinôme avec Δ , les racines et le signe de a .

3) Lis les x qui conviennent et écris la solution sous forme d'**intervalles**. Les crochets sont fermés si l'inégalité est large ($\leq$, $\geq$) et ouverts si elle est stricte ($<$, $>$).

Exemple 1 $x^2 - 3x - 4 \geq 0$. Racines : -1 et 4 ($\Delta = 25$). Comme $a = 1 > 0$, le trinôme est positif à l'extérieur des racines. Solution : $]-\infty ; -1] \cup [4 ; +\infty[$.

Exemple 2 : avec un second membre $2x^2 \leq x + 3$. On se ramène à $2x^2 - x - 3 \leq 0$. $\Delta = 1 + 24 = 25$, racines $1-5/4 = -1$ et $1+5/4 = 3/2$. Avec $a = 2 > 0$, le trinôme est négatif **entre** les racines. Solution : $[-1 ; 3/2]$. Test : $x = 0$ donne $0 \leq 3$, vrai ✓.

Exemple 3 : pas de solution, ou toutes Pour $x^2 + 2x + 5$: $\Delta = 4 - 20 < 0$ et $a > 0$, donc le trinôme est toujours strictement positif. L'inéquation $x^2 + 2x + 5 < 0$ n'a aucune solution (ensemble vide $\emptyset$), et $x^2 + 2x + 5 > 0$ a pour solution $\mathbb{R}$.

Piège : ne pas simplifier par un facteur inconnu Pour résoudre $x^2 \geq 3x$, n'écris pas « $x \geq 3$ » en divisant par x : tu perds des solutions (et si x est négatif, l'inégalité change

de sens). Écris $x^2 - 3x \geq 0$, c'est-à-dire $x(x - 3) \geq 0$, de racines 0 et 3 : solution $]-\infty ; 0] \cup [3 ; +\infty[$.

8. Problèmes d'optimisation

Optimiser, c'est trouver la valeur qui rend une grandeur **la plus grande** ou **la plus petite** possible. Quand cette grandeur s'écrit avec un trinôme, la réponse est donnée par le **sommet de la parabole**.

Méthode 1) Choisis une inconnue x et précise son **domaine** (une longueur est positive, etc.).

2) Exprime la grandeur à optimiser en fonction de x : tu obtiens un trinôme.

3) Détermine son sommet (α ; β) et vérifie que α est bien dans le domaine.

4) Si $a < 0$: maximum β atteint en α . Si $a > 0$: minimum β atteint en α .

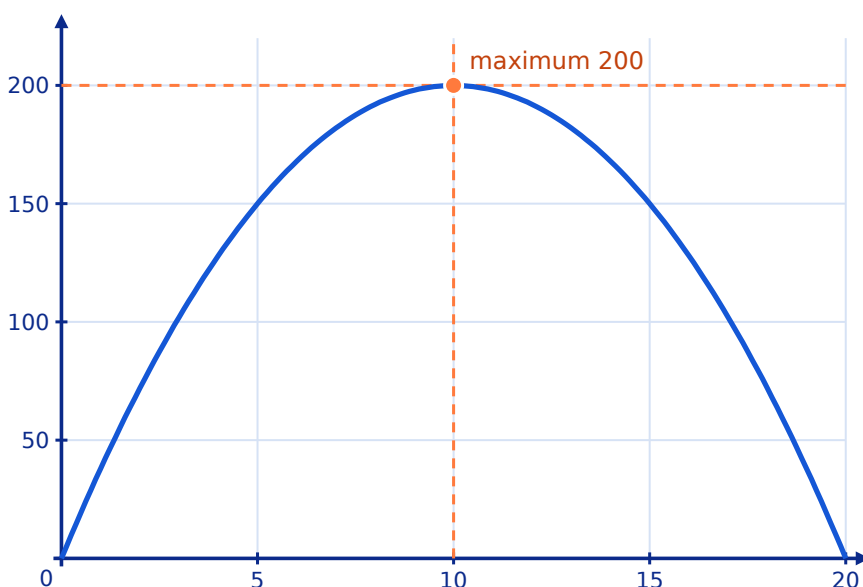
5) Conclut par une phrase avec les unités.

L'enclos du jardinier Un jardinier dispose de 40 m de grillage pour fermer un enclos rectangulaire. Un côté de l'enclos est le mur de la maison (pas de grillage de ce côté). Quelle est l'aire maximale ?

Mise en équation. Soit x (en m) la longueur de chacun des deux côtés perpendiculaires au mur. Le côté parallèle au mur mesure $40 - 2x$. Il faut $0 < x < 20$. L'aire est $A(x) = x(40 - 2x) = -2x^2 + 40x$.

Sommet. $a = -2 < 0$: maximum en $\alpha = -40/-4 = 10$, valant $A(10) = 10 \times 20 = 200$.

Conclusion. L'aire maximale est 200 m^2 , obtenue avec deux côtés de 10 m et un côté de 20 m (le côté parallèle au mur est le double des autres).



Aire $A(x)$ de l'enclos : la parabole est « en cloche », son sommet (10 ; 200) donne la meilleure solution.

Mathbot te conseille « Avant de te lancer dans les calculs, demande-toi : mon trinôme est-il tourné vers le haut ou vers le bas ? Pour un maximum, il faut $a < 0$; pour un minimum, $a > 0$. Si tu trouves l'inverse de ce qu'annonce le problème, relis ta mise

Fiche en ligne : maths-facile.eu/fonctions-polynomes-du-second-degre-cours-1ere/ · Cours, exercices et contrôles

9. Équations qui se ramènent au second degré

Certaines équations ne sont pas du second degré au départ, mais le deviennent avec un **changement d'inconnue**. L'exemple le plus courant est l'équation « bicarrée » $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

Équation bicarrée 1) Pose $X = x^2$ (on a alors $x^4 = X^2$).

2) Résous $aX^2 + bX + c = 0$.

3) **Ne garde que les X positifs ou nuls** (un carré ne peut pas être négatif).

4) Pour chaque $X \geq 0$ retenu, résous $x^2 = X$: $x = \sqrt{X}$ ou $x = -\sqrt{X}$.

Exemple 1 $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. Avec $X = x^2$: $X^2 - 5X + 4 = 0$, $\Delta = 25 - 16 = 9$, $X = 5 \pm 3/2$, soit $X = 1$ ou $X = 4$. Les deux sont positifs : $x = \pm 1$ ou $x = \pm 2$. L'équation a **4 solutions** : $-2, -1, 1, 2$.

Exemple 2 : une valeur de X à rejeter $x^4 + x^2 - 6 = 0$. Avec $X = x^2$: $X^2 + X - 6 = 0$, $\Delta = 1 + 24 = 25$, $X = -1 \pm 5/2$, soit $X = 2$ ou $X = -3$. On rejette -3 (aucun carré n'est négatif). Il reste $x^2 = 2$: $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$.

Autre usage du second degré : trouver les **points d'intersection d'une parabole et d'une droite**. On résout $f(x) = mx + p$, qui est une équation du second degré : $\Delta > 0$ donne deux points d'intersection, $\Delta = 0$ une droite tangente (un seul point), $\Delta < 0$ aucun point. Le signe de $f(x) - (mx + p)$ indique laquelle des deux courbes est au-dessus de l'autre.

À retenir

- Un trinôme du second degré s'écrit **$ax^2 + bx + c$** avec $a \neq 0$; sa courbe est une parabole.
- **Forme canonique** : $a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -b/2a$ et $\beta = f(\alpha)$; le sommet est $S(\alpha ; \beta)$, l'axe de symétrie est $x = \alpha$.
- $a > 0$: minimum β (décroissante puis croissante). $a < 0$: maximum β (croissante puis décroissante).
- **Discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$: $\Delta > 0$, deux racines **$-b \pm \sqrt{\Delta}/2a$** ; $\Delta = 0$, une racine double **$-b/2a$** ; $\Delta < 0$, aucune racine réelle.
- **Factorisation** : $a(x - x_1)(x - x_2)$ si $\Delta > 0$; $a(x - x_0)^2$ si $\Delta = 0$; somme **$-b/a$** et produit **c/a** des racines.
- **Signe** : signe de a à l'extérieur des racines, signe de $-a$ entre les racines ; si $\Delta \leq 0$, signe de a partout (sauf en la racine double).
- **Inéquation** : tout d'un côté, signe du trinôme, intervalles (crochets fermés si l'inégalité est large).
- **Optimisation** : écrire la grandeur en fonction de x , trouver le sommet, vérifier qu'il est

dans le domaine, conclure avec l'unité.

- Équation bicarrée : poser $X = x^2$, résoudre, ne garder que $X \geq 0$.