

Fonctions trigonométriques

Corrigé du contrôle - Terminale

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice interdite.

1 Valeurs exactes / 3 pts

Barème : 0,75 point par valeur.

- $\cos 7\pi/6 = \cos(\pi + \pi/6) = -\cos \pi/6 = -\sqrt{3}/2$.
- $\sin(-3\pi/4) = -\sin 3\pi/4 = -\sin(\pi - \pi/4) = -\sin \pi/4 = -\sqrt{2}/2$.
- $13\pi/3 = \pi/3 + 4\pi$, donc $\cos 13\pi/3 = \cos \pi/3 = 1/2$.
- $\sin 11\pi/6 = \sin(2\pi - \pi/6) = -\sin \pi/6 = -1/2$.

2 Limite, parité et période / 3 pts

- $\sin 5x/2x = 5/2 \times \sin 5x/5x \rightarrow 5/2 \times 1 = 5/2$. (1 pt)
- En divisant numérateur et dénominateur par x (> 0) : $2x + \cos x/x + 1 = (2 + \cos x/x) / (1 + 1/x)$. Comme $|\cos x| \leq 1$, on a $-1/x \leq \cos x/x \leq 1/x$, donc $\cos x/x \rightarrow 0$ (gendarmes). Le numérateur tend vers 2, le dénominateur vers 1 : la limite est 2. (1 pt)
- $f(-x) = \sin(-x) \cos(-x) = -\sin x \cos x = -f(x)$: impaire. (0,5 pt) $f(x + \pi) = \sin(x + \pi) \cos(x + \pi) = (-\sin x)(-\cos x) = f(x)$: π est une période. (0,5 pt)

3 Équations et inéquation / 4 pts

- $\sin x = \sqrt{3}/2 = \sin \pi/3 \Leftrightarrow x = \pi/3$ ou $x = 2\pi/3$. $S = \{\pi/3 ; 2\pi/3\}$. (1,5 pt)
- Avec $X = \cos x$: $2X^2 + X - 1 = 0$, discriminant 9, $X = -1 + 3/4 = 1/2$ ou $X = -1 - 3/4 = -1$. $\cos x = 1/2 \Leftrightarrow x = \pi/3$ ou $5\pi/3$; $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi$. $S = \{\pi/3 ; \pi ; 5\pi/3\}$. (1,5 pt)
- $\sin x = -1/2$ pour $x = 7\pi/6$ et $x = 11\pi/6$ dans $[0 ; 2\pi]$. Le sinus est strictement supérieur à $-1/2$ avant $7\pi/6$ et après $11\pi/6$: $S = [0 ; 7\pi/6[\cup]11\pi/6 ; 2\pi]$. (1 pt)

4 Étude d'une fonction / 5 pts

- $f(-x) = -2 \sin x + \sin 2x = -f(x)$: impaire ; $f(x + 2\pi) = 2 \sin(x + 2\pi) - \sin(2x + 4\pi) = f(x)$. On étudie sur $[0 ; \pi]$ et on complète par symétrie par rapport à 0 puis par translations. (1 pt)
- $f(x) = 2\cos x - 2\cos 2x = 2\cos x - 2(2\cos^2 x - 1) = -4\cos^2 x + 2\cos x + 2 = -2(2\cos^2 x - \cos x - 1)$. Or $(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 2\cos^2 x - 2\cos x + \cos x - 1$

$= 2\cos^2 x - \cos x - 1$. Donc $f'(x) = -2(2\cos x + 1)(\cos x - 1)$. (1,5 pt)

- c. Sur $[0 ; \pi]$, $\cos x - 1 \leq 0$, donc $-2(\cos x - 1) \geq 0$ (nul seulement en 0) : f' a le signe de $2\cos x + 1$, positif si $x < 2\pi/3$. $f(0) = 0$; $f(2\pi/3) = 2 \times \sqrt{3}/2 - \sin 4\pi/3 = \sqrt{3} + \sqrt{3}/2 = 3\sqrt{3}/2$; $f(\pi) = 0 - \sin 2\pi = 0$.

x	0	$2\pi/3$	π
signe de f'	0 +	0 -	
variations de f	0 ↗	$3\sqrt{3}/2$ ↘	0

(1,5 pt)

- d. $f'(0) = -2 \times 3 \times 0 = 0$ et $f(0) = 0$: tangente horizontale d'équation $y = 0$. (1 pt)

5 Un ressort / 3 pts

- a. Amplitude 0,05 m ; période $2\pi/4\pi = 0,5$ s. (1 pt)
 b. $x'(t) = 0,05 \times (-4\pi \sin(4\pi t)) = -0,2\pi \sin(4\pi t)$ m/s. (1 pt)
 c. $x(t) = 0 \Leftrightarrow \cos(4\pi t) = 0 \Leftrightarrow 4\pi t = \pi/2 + k\pi$. La plus petite valeur positive est $4\pi t = \pi/2$, soit $t = 1/8 = 0,125$ s. (1 pt)

6 Une démonstration / 2 pts

- a. $(\cos x + \sin x)^2 = \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + \sin^2 x = 1 + \sin 2x$. (1 pt)
 b. $\sin 2x \leq 1$, donc $(\cos x + \sin x)^2 \leq 2$, soit $|\cos x + \sin x| \leq \sqrt{2}$, c'est-à-dire $-\sqrt{2} \leq \cos x + \sin x \leq \sqrt{2}$. (1 pt)