

Fonctions trigonométriques

Corrigé des exercices - Terminale

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Degrés et radians ★★★

- a. $48 \times \pi/180 = 48\pi/180 = 4\pi/15$ rad. $110 \times \pi/180 = 11\pi/18$ rad.
- b. $7\pi/10 \times 180/\pi = 126^\circ$. $5\pi/12 \times 180/\pi = 75^\circ$.
- c. Un tour = 2π rad. Un quart de tour = $2\pi/4 = \pi/2$ rad ; un huitième de tour = $2\pi/8 = \pi/4$ rad.

2 Valeurs exactes ★★★

- a. $\cos 5\pi/6 = \cos(\pi - \pi/6) = -\cos \pi/6 = -\sqrt{3}/2$.
- b. $\sin(-\pi/3) = -\sin \pi/3 = -\sqrt{3}/2$ (sinus impair).
- c. $\cos 7\pi/4 = \cos(2\pi - \pi/4) = \cos(-\pi/4) = \cos \pi/4 = \sqrt{2}/2$.
- d. $9\pi/2 = \pi/2 + 4\pi$, donc $\sin 9\pi/2 = \sin \pi/2 = 1$.
- e. $\cos(-\pi) = \cos \pi = -1$.
- f. $25\pi/3 = \pi/3 + 8\pi$, donc $\cos 25\pi/3 = \cos \pi/3 = 1/2$.

3 Parité ★★★

- a. $f(-x) = (-x)^3 \cos(-x) = -x^3 \cos x = -f(x)$: **impaire**.
- b. $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0 et $g(-x) = \sin(-x)/-x = -\sin x/-x = g(x)$: **paire**.
- c. $h(0) = 1 \neq 0$, donc h n'est pas impaire (une fonction impaire définie en 0 s'annule en 0). $h(\pi/2) = 0 + 1 = 1$ et $h(-\pi/2) = 0 - 1 = -1$, différents : h n'est pas paire. **Ni paire ni impaire.**
- d. $k(-x) = \sin(-x) \cos(-x) = -\sin x \cos x = -k(x)$: **impaire**.

4 Périodes ★★★

La fonction $x \mapsto \cos(\omega x + \varphi)$ ou $\sin(\omega x + \varphi)$ a pour période $2\pi/\omega$; ajouter une constante ou multiplier par un réel ne change pas la période.

- a. $\omega = 3$: période $2\pi/3$. Vérification : $\cos(3(x + 2\pi/3)) = \cos(3x + 2\pi) = \cos 3x$.
- b. $\omega = 1/2$: période $2\pi \div 1/2 = 4\pi$.
- c. $\omega = \pi$: période $2\pi/\pi = 2$.

d. $\omega = 2$: période $2\pi/2 = \pi$.

5 Premières dérivées ★★★

- a. $f'(x) = 3 \times (-\sin x) - 2 \times \cos x = -3 \sin x - 2 \cos x$.
- b. $g'(x) = 2x + \cos x$.
- c. $h'(x) = 5 \cos x - 1$.
- d. $k'(x) = -\sin x + 4$.

6 Équations de base ★★★

- a. $\sin x = \sin \pi/3 \Leftrightarrow x = \pi/3$ ou $x = \pi - \pi/3 = 2\pi/3$. $S = \{\pi/3 ; 2\pi/3\}$.
- b. $\cos x = \cos 2\pi/3 \Leftrightarrow x = 2\pi/3$ ou $x = -2\pi/3 + 2\pi = 4\pi/3$. $S = \{2\pi/3 ; 4\pi/3\}$.
- c. $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\pi/2 + 2k\pi$; dans $[0 ; 2\pi[$, $S = \{3\pi/2\}$.
- d. Comme $\cos x \leq 1$ pour tout x , l'équation n'a aucune solution : $S = \emptyset$.

7 Encadrements et extrema ★★★

- a. $-3 \leq 3\cos x \leq 3$, donc $-1 \leq 3\cos x + 2 \leq 5$. Maximum 5 pour $x = 0$ ($\cos = 1$) ; minimum -1 pour $x = \pi$ ($\cos = -1$).
- b. $-2 \leq 2 \sin x \leq 2$, donc $-2 \leq -2 \sin x \leq 2$ et $-1 \leq 1 - 2 \sin x \leq 3$. Maximum 3 pour $x = -\pi/2$ ($\sin = -1$) ; minimum -1 pour $x = \pi/2$ ($\sin = 1$).
- c. $0 \leq \cos^2 x \leq 1$, donc $-3 \leq \cos^2 x - 3 \leq -2$. Maximum -2 pour $x = 0$; minimum -3 pour $x = \pi/2$ ($\cos = 0$).

8 Limites en 0 ★★★

- a. $\sin 3x/x = 3 \times \sin 3x/3x$. Avec $u = 3x \rightarrow 0$, $\sin u/u \rightarrow 1$. La limite vaut 3.
- b. $\sin x/2x = 1/2 \times \sin x/x \rightarrow 1/2 \times 1 = 1/2$.
- c. $\sin 4x/3x = 4/3 \times \sin 4x/4x \rightarrow 4/3$.
- d. $x/\sin x$ est l'inverse de $\sin x/x$, qui tend vers 1 ($\neq 0$) : la limite est 1.

9 Dérivées composées ★★★

- a. $f'(x) = 2 \cos(2x + 1)$.
- b. $g'(x) = -2x \sin(x^2)$ (forme $\cos u$ avec $u = x^2$ et $u' = 2x$).
- c. $h'(x) = \cos x \times \cos x + \sin x \times (-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$.
- d. $k = 1/v$ avec $v = 2 + \sin x > 0$ (car $\sin x \geq -1$) et $v' = \cos x$: $k'(x) = -\cos x/(2 + \sin x)^2$.
- e. $l = u^3$ avec $u = \cos x$: $l'(x) = 3 \cos^2 x \times (-\sin x) = -3 \cos^2 x \sin x$.
- f. $m'(x) = 2x \cos x + x^2 \times (-\sin x) = 2x \cos x - x^2 \sin x$.

10 Limites en 0 et en l'infini ★★★

- a. Avec $y = x/2$: $1 - \cos x = 2 \sin^2 y$ et $x^2 = 4y^2$, donc $1 - \cos x/x^2 = 1/2 \times (\sin y/y)^2 \rightarrow 1/2$.
- b. $\tan x = \sin x/\cos x$, donc $\tan x/x = \sin x/x \times 1/\cos x \rightarrow 1 \times 1 = 1$.
- c. $x + \sin x/x = 1 + \sin x/x \rightarrow 1 + 0 = 1$ (car $|\sin x| \leq 1$, gendarmes).
- d. Pour tout x , $|\cos x| \leq 1$, donc $|\cos x/x^2 + 1| \leq 1/x^2 + 1$, qui tend vers 0. Par le théorème des gendarmes, la limite est 0.

11 Doubler l'angle ★★★

$\cos 2x = \cos \pi/3 \Leftrightarrow 2x = \pi/3 + 2k\pi$ ou $2x = -\pi/3 + 2k\pi \Leftrightarrow x = \pi/6 + k\pi$ ou $x = -\pi/6 + k\pi$.

Dans $[0 ; 2\pi[$: première famille, $k = 0$ et $k = 1$ donnent $\pi/6$ et $7\pi/6$; seconde famille, $k = 1$ et $k = 2$ donnent $5\pi/6$ et $11\pi/6$.

$S = \{\pi/6 ; 5\pi/6 ; 7\pi/6 ; 11\pi/6\}$. Contrôle : $\cos(2 \times 5\pi/6) = \cos 5\pi/3 = 1/2$. ✓

12 Un angle décalé ★★★

$\sin(x - \pi/4) = \sin \pi/4 \Leftrightarrow x - \pi/4 = \pi/4 + 2k\pi$ ou $x - \pi/4 = \pi - \pi/4 + 2k\pi$, soit $x = \pi/2 + 2k\pi$ ou $x = \pi + 2k\pi$.

Dans $] -\pi ; \pi]$: $x = \pi/2$ (avec $k = 0$) ou $x = \pi$ (avec $k = 0$). $S = \{\pi/2 ; \pi\}$. Contrôle : $\sin(\pi - \pi/4) = \sin 3\pi/4 = \sqrt{2}/2$. ✓

13 Un second degré en sinus ★★★

Posons $X = \sin x$: $2X^2 + X - 1 = 0$, de discriminant $1 + 8 = 9$. Donc $X = -1 - 3/4 = -1$ ou $X = -1 + 3/4 = 1/2$.

$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = 3\pi/2$ dans $[0 ; 2\pi[$. $\sin x = 1/2 \Leftrightarrow x = \pi/6$ ou $x = 5\pi/6$. $S = \{\pi/6 ; 5\pi/6 ; 3\pi/2\}$.

14 Trois inéquations ★★★

- a. $\sin x = 1/2$ pour $x = \pi/6$ et $5\pi/6$; le sinus est au-dessus de $1/2$ entre ces deux valeurs. $S = [\pi/6 ; 5\pi/6]$.
- b. $\cos x = \sqrt{3}/2$ pour $x = \pm\pi/6$. Le cosinus est supérieur à $\sqrt{3}/2$ entre $-\pi/6$ et $\pi/6$. Il est strictement inférieur à $\sqrt{3}/2$ à l'extérieur : $S = [-\pi ; -\pi/6[\cup]\pi/6 ; \pi]$.
- c. $\cos x \geq -1/2$. $\cos x = -1/2$ pour $x = 2\pi/3$ et $4\pi/3$. Le cosinus est supérieur à $-1/2$ autour de 0 et de 2π : $S = [0 ; 2\pi/3] \cup [4\pi/3 ; 2\pi]$.

15 Étude de $\cos x + \lfloor x/2 \rfloor$ ★★★

- a. $f(x) = -\sin x + 1/2$. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1/2 \Leftrightarrow x = \pi/6$ ou $x = 5\pi/6$ (dans $[0 ; \pi]$).
- b. $f(x) > 0 \Leftrightarrow \sin x < 1/2 \Leftrightarrow x \in [0 ; \pi/6[\cup]5\pi/6 ; \pi]$. Valeurs : $f(0) = 1$; $f(\pi/6) = \sqrt{3}/2 + \pi/12 \approx 1,13$; $f(5\pi/6) = -\sqrt{3}/2 + 5\pi/12 \approx 0,44$; $f(\pi) = -1 + \pi/2 \approx 0,57$.

x	0	$\pi/6$	$5\pi/6$	π
signe de f'	+	0 -	0 +	
variations de f	1 ↗	$\approx 1,13$ ↘	$\approx 0,44$ ↗	$\approx 0,57$

- c. Sur $[0 ; \pi/6]$, $f \geq 1 > 1/2$: pas de solution. Sur $[\pi/6 ; 5\pi/6]$, f est continue et strictement décroissante de $\approx 1,13$ à $\approx 0,44$, qui encadrent $1/2$: une solution (théorème des valeurs intermédiaires). Sur $[5\pi/6 ; \pi]$, f est continue et strictement croissante de $\approx 0,44$ à $\approx 0,57$: une solution. Au total, **2 solutions**.

16 Tangentes ★★★

On applique $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

- a. $\sin'(0) = \cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$: $y = x$.
- b. $\cos'(\pi/6) = -\sin \pi/6 = -1/2$ et $\cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$: $y = -1/2(x - \pi/6) + \sqrt{3}/2$.
- c. $\cos'(\pi/2) = -\sin \pi/2 = -1$ et $\cos \pi/2 = 0$: $y = -(x - \pi/2) = -x + \pi/2$.

17 Étude de $\cos 2x + 2\cos x$ ★★★

- a. $f(-x) = \cos(-2x) + 2\cos(-x) = f(x)$; $f(x + 2\pi) = \cos(2x + 4\pi) + 2\cos(x + 2\pi) = f(x)$. On étudie sur $[0 ; \pi]$, le reste s'en déduit par symétrie et translations.
- b. $f(x) = -2 \sin 2x - 2 \sin x = -4 \sin x \cos x - 2 \sin x = -2 \sin x (2\cos x + 1)$.
- c. Sur $[0 ; \pi]$, $\sin x \geq 0$ (nul en 0 et π). $2\cos x + 1 > 0 \Leftrightarrow \cos x > -1/2 \Leftrightarrow x < 2\pi/3$. Donc $f \leq 0$ sur $[0 ; 2\pi/3]$ et $f \geq 0$ sur $[2\pi/3 ; \pi]$. $f(0) = 3$; $f(2\pi/3) = \cos 4\pi/3 + 2\cos 2\pi/3 = -1/2 - 1 = -3/2$; $f(\pi) = 1 - 2 = -1$.

x	0	$2\pi/3$	π
signe de f'	0 -	0 +	
variations de f	3 ↘	$-3/2$ ↗	-1

- d. $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, donc $f(x) = 2\cos^2 x + 2\cos x - 1$. Avec $X = \cos x$: $2X^2 + 2X - 1 = 0$, discriminant $4 + 8 = 12$, $X = -2 \pm 2\sqrt{3}/4 = -1 \pm \sqrt{3}/2$. Comme $X \in [-1 ; 1]$, seule $X = \sqrt{3} - 1/2 \approx 0,37$ convient. Donc $x = \arccos(\sqrt{3} - 1/2) \approx 1,20$ rad (une seule solution dans $[0 ; \pi]$, en accord avec le tableau : f passe de 3 à $-3/2$ puis reste négative).

18 Une identité et une dérivée ★★★

- a. $\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin^2 x - \cos^2 x = -(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$$\sin^2 x) = -\cos 2x.$$

$$b. f(x) = 4 \sin^3 x \cos x - 4 \cos^3 x \times (-\sin x) = 4 \sin x \cos x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 4 \sin x \cos x = 2 \sin 2x.$$

$$c. (-\cos 2x)' = -(-2 \sin 2x) = 2 \sin 2x : \text{même résultat. } \checkmark$$

19 Étude de $[(\sin x/2 + \cos x)]$ ★★★

$$a. 2 + \cos x \geq 1 > 0 : \text{le dénominateur ne s'annule jamais, } g \text{ est définie sur } \mathbb{R}. g(-x) = -\sin x/2 + \cos x = -g(x) : \text{impaire. } g(x + 2\pi) = g(x) : 2\pi\text{-périodique.}$$

$$b. g'(x) = \cos x(2 + \cos x) - \sin x \times (-\sin x)/(2 + \cos x)^2 = 2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x/(2 + \cos x)^2 = 2\cos x + 1/(2 + \cos x)^2.$$

$$c. \text{Le dénominateur est } > 0 : g' \text{ a le signe de } 2\cos x + 1, \text{ positif si } x < 2\pi/3. g(0) = 0 ; g(2\pi/3) = \sqrt{3}/2 \div 3/2 = \sqrt{3}/3 ; g(\pi) = 0.$$

x	0	$2\pi/3$	π
signe de g'	+	0 -	
variations de g	0 ↗	$\sqrt{3}/3$ ↘	0

$$d. \text{Sur } [0 ; \pi], 0 \leq g(x) \leq \sqrt{3}/3. \text{ Par imparité, sur } [-\pi ; 0], -\sqrt{3}/3 \leq g \leq 0. \text{ Par } 2\pi\text{-périodicité, l'encadrement vaut sur } \mathbb{R} : |g(x)| \leq \sqrt{3}/3.$$

20 Limites par encadrement ★★★

$$a. \text{Posons } u = 1/x : u \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow +\infty \text{ (avec } u > 0). \text{ Alors } x \sin(1/x) = \sin u/u \rightarrow 1.$$

$$b. \tan 2x/\sin 3x = \sin 2x/\cos 2x \times \sin 3x = \sin 2x/2x \times 3x/\sin 3x \times 2/3 \times 1/\cos 2x \rightarrow 1 \times 1 \times 2/3 \times 1 = 2/3.$$

$$c. \text{Pour } x > 0, |x \cos x/x^2 + 1| \leq x/x^2 + 1 \leq x/x^2 = 1/x \rightarrow 0. \text{ Par gendarmes, la limite est } 0.$$

$$d. \sin x/x^2 + x = \sin x/x \times 1/x + 1 \rightarrow 1 \times 1 = 1.$$

21 Combiner cosinus et sinus ★★★

$$\text{Par la formule d'addition, } \cos(x - \pi/6) = \cos x \cos \pi/6 + \sin x \sin \pi/6 = \sqrt{3}/2 \cos x + 1/2 \sin x. \text{ Donc } \sqrt{3} \cos x + \sin x = 2 \cos(x - \pi/6).$$

$$\text{L'équation devient } \cos(x - \pi/6) = 1/2 = \cos \pi/3, \text{ soit } x - \pi/6 = \pi/3 + 2k\pi \text{ ou } x - \pi/6 = -\pi/3 + 2k\pi, \text{ c'est-à-dire } x = \pi/2 + 2k\pi \text{ ou } x = -\pi/6 + 2k\pi.$$

$$\text{Dans } [0 ; 2\pi[: x = \pi/2 \text{ et } x = 11\pi/6. S = \{\pi/2 ; 11\pi/6\}. \text{ Contrôle : } x = 11\pi/6 : \sqrt{3} \times \sqrt{3}/2 - 1/2 = 3/2 - 1/2 = 1. \checkmark$$

22 La grande roue ★★★

$$a. \text{La période de } t \mapsto \cos(\pi t/30) \text{ est } 2\pi \div \pi/30 = 60 \text{ s. } h(0) = 17 - 15 = 2 ; h(10) =$$

$17 - 15 \cos \frac{\pi}{3} = 17 - 7,5 = 9,5$; $h(15) = 17 - 15 \cos \frac{\pi}{2} = 17$; $h(30) = 17 - 15 \cos \pi = 32$.

b. Minimum $17 - 15 = 2$ m (en $t = 0$ et 60) ; maximum $17 + 15 = 32$ m (en $t = 30$).

c. $h(t) = 24,5 \Leftrightarrow 15 \cos(\frac{\pi t}{30}) = -7,5 \Leftrightarrow \cos(\frac{\pi t}{30}) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi t}{30} = \frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3}$ (pour $t \in [0 ; 60]$, $\frac{\pi t}{30} \in [0 ; 2\pi]$) $\Leftrightarrow t = 20$ ou $t = 40$. La hauteur dépasse $24,5$ m quand $\cos(\frac{\pi t}{30}) < -\frac{1}{2}$, c'est-à-dire pour $t \in]20 ; 40[$: pendant **20 s**.

d. $h'(t) = -15 \times (-\frac{\pi}{30} \sin(\frac{\pi t}{30})) = \frac{\pi}{2} \sin(\frac{\pi t}{30})$. La vitesse maximale est $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$ m/s, atteinte quand $\sin(\frac{\pi t}{30}) = 1$, soit $t = 15$ s (la nacelle monte) ; en $t = 45$ s, $\sin = -1$ et la nacelle descend à la même vitesse.

23 La marée ★★★

a. Période : $2\pi \div \frac{\pi}{6} = 12$ h. Minimum $5 - 2 = 3$ m, maximum $5 + 2 = 7$ m.

b. Pleine mer quand $\cos(\frac{\pi}{6}(t - 2)) = 1$, soit $t = 2$ et $t = 14$ (à 2 h et 14 h). Basse mer quand le cosinus vaut -1 : $\frac{\pi}{6}(t - 2) = \pi$, soit $t = 8$ et $t = 20$ (à 8 h et 20 h).

c. $h(t) \geq 6 \Leftrightarrow \cos(\frac{\pi}{6}(t - 2)) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \frac{\pi}{6}(t - 2) \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow -2 + 12k \leq t - 2 \leq 2 + 12k \Leftrightarrow 12k \leq t \leq 12k + 4$. Pour $0 \leq t < 24$: $t \in [0 ; 4] \cup [12 ; 16]$. Le bateau peut sortir de minuit à 4 h, puis de 12 h à 16 h.

d. $h'(t) = -2 \times \frac{\pi}{6} \sin(\frac{\pi}{6}(t - 2)) = -\frac{\pi}{3} \sin(\frac{\pi}{6}(t - 2))$. La variation maximale est $\frac{\pi}{3} \approx 1,05$ m/h, atteinte à $t = 5$ (le niveau baisse) et $t = 11$ (le niveau monte).