

Fractions

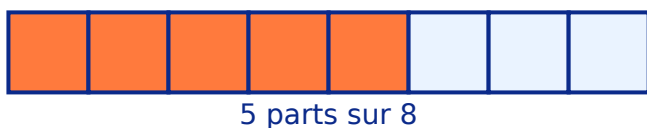
Cours de maths - 5ème

Dans ce chapitre, tu vas voir qu'une fraction est à la fois **une part d'un tout** et un **nombre** : le résultat d'une division. Tu apprendras à **simplifier** des fractions, à les **comparer**, puis à les **additionner et les soustraire** quand les dénominateurs sont multiples les uns des autres. Rappel de 6ème : **3/4** se lit « trois quarts » ; le dénominateur (en bas) dit en combien de parts égales on partage l'unité, le numérateur (en haut) dit combien de parts on prend.

1. Une fraction, c'est un quotient

Fraction et quotient Pour deux nombres a et b ($b \neq 0$), la fraction $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b , donne a . C'est le **quotient** de a par b : $\frac{a}{b} = a \div b$.

Partager une pizza entre 4 amis, c'est calculer $1 \div 4 = \frac{1}{4}$. Partager 3 pizzas entre 4 amis, c'est calculer $3 \div 4 = \frac{3}{4}$: chacun reçoit trois quarts de pizza, soit 0,75.



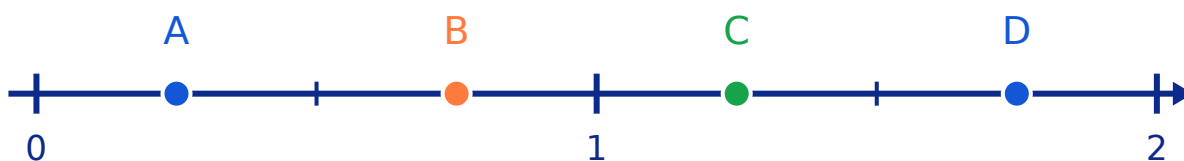
La bande est partagée en 8 parts égales ; 5 parts sont coloriées : on a colorié **5/8** de la bande.

Passer de la fraction à l'écriture décimale On effectue la division du numérateur par le dénominateur (de tête, posée ou à la calculatrice).

$$\frac{7}{2} = 7 \div 2 = 3,5 \quad \frac{9}{4} = 9 \div 4 = 2,25 \quad \frac{3}{20} = 3 \div 20 = 0,15.$$

Attention Certaines fractions n'ont pas d'écriture décimale exacte : $\frac{1}{3} = 0,333\dots$ ne s'arrête jamais. On garde alors la fraction, qui est la valeur **exacte** du nombre.

Une fraction se place aussi sur une droite graduée. Ici, une unité est partagée en 4 : $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{3}{4}$, $C = \frac{5}{4}$ et $D = \frac{7}{4}$.



Chaque graduation vaut un quart. Avec **5/4**, on a dépassé 1 : cinq quarts, c'est un entier (4 quarts) plus un quart de plus.

Entier + fraction Une fraction dont le numérateur est plus grand que le dénominateur peut s'écrire comme la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1. On cherche combien de fois le dénominateur « rentre » dans le numérateur.

17/5 : $17 = 3 \times 5 + 2$, donc **17/5** = 3 + **2/5**.

2. Prendre une fraction d'une quantité

Calculer b/c de a 1) On partage la quantité en c parts égales (on divise par c). 2) On garde b de ces parts (on multiplie par b). Cela revient à calculer $a \times b \div c$.

Exemple Dans une classe de 28 élèves, **3/7** des élèves sont à vélo. $28 \div 7 = 4$ élèves par septième, puis $4 \times 3 =$ **12 élèves** viennent à vélo.

28 élèves : 7 parts de 4 élèves



Le modèle en barres : la barre entière est coupée en 7 parts de 4 élèves ; on en prend 3.

Astuce Pour **1/2**, **1/4**, **1/10** d'une quantité, on divise simplement par 2, par 4, par 10. Pour **3/4** d'une quantité, on trouve le quart, puis on le multiplie par 3.

3. Fractions égales et simplification

Quotients égaux On ne change pas la valeur d'une fraction quand on multiplie (ou quand on divise) son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul : **$a/b = a \times k / b \times k = a \div k / b \div k$** .

Exemple **$2/3 = 2 \times 5 / 3 \times 5 = 10/15$** et **$18/30 = 18 \div 6 / 30 \div 6 = 3/5$** .

Simplifier, fraction irréductible Simplifier une fraction, c'est trouver une fraction égale avec un numérateur et un dénominateur plus petits. Une fraction est **irréductible** quand on ne peut plus la simplifier.

Comment simplifier On cherche un diviseur commun au numérateur et au dénominateur, en s'aidant des critères de divisibilité : par 2 (chiffre des unités pair), par 5 (se termine par 0 ou 5), par 10 (se termine par 0), par 3 (somme des chiffres multiple de 3), par 9 (somme des chiffres multiple de 9). On recommence jusqu'à ce que ce ne soit plus possible.

$36/60 = 18/30 = 9/15 = 3/5$ (divisions successives par 2, 2, puis 3).

Piège On multiplie ou on divise **les deux termes** par le même nombre. Écrire **2/3** =

$2+4/3+4 = 6/7$ est faux : l'addition ne conserve pas la valeur de la fraction.

4. Comparer une fraction à 0,5 et à 1

Comparer à 1 Si le numérateur est plus petit que le dénominateur, la fraction est inférieure à 1. S'ils sont égaux, elle vaut 1. S'il est plus grand, elle est supérieure à 1.
 $5/6 < 1$; $8/8 = 1$; $9/7 > 1$.

Comparer à $1/2$ Une fraction est inférieure à **$1/2$** si son numérateur est inférieur à la moitié de son dénominateur ; elle lui est égale s'il en est la moitié ; elle est supérieure sinon.

$3/10 < 1/2$ (car $3 < 5$) ; **$7/14 = 1/2$** ; **$11/20 > 1/2$** (car $11 > 10$).

Ces deux repères permettent de ranger vite : **$3/10 < 1/2 < 11/20 < 9/7$.**

5. Comparer deux fractions

Même dénominateur, même numérateur • Si deux fractions ont le **même dénominateur**, la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur : **$5/9 < 7/9$.**
• Si deux fractions ont le **même numérateur**, la plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur (les parts sont plus grosses) : **$3/5 > 3/8$.**

Dénominateurs différents On écrit les fractions avec un **dénominateur commun**, c'est-à-dire un multiple commun des deux dénominateurs, puis on compare les numérateurs. Quand un dénominateur est multiple de l'autre, le plus grand des deux convient.

Exemple Comparons **$5/6$** et **$11/12$** . 12 est un multiple de 6 : **$5/6 = 10/12$** . Comme $10 < 11$, on obtient **$5/6 < 11/12$** .

Si les dénominateurs ne sont pas multiples On cherche dans la liste des multiples de chacun un nombre commun. Pour **$3/4$** et **$5/6$** : multiples de 4 : 4, 8, **12...** ; multiples de 6 : 6, **12...** On prend 12 : **$9/12 < 10/12$** .

6. Additionner et soustraire des fractions

Même dénominateur On additionne (ou on soustrait) les numérateurs et on **garde le dénominateur** : **$a/c + b/c = a+b/c$** et **$a/c - b/c = a-b/c$.**
 $2/9 + 5/9 = 7/9$; $11/8 - 3/8 = 8/8 = 1$.

Dénominateurs différents (l'un est multiple de l'autre) 1) On écrit la fraction dont le dénominateur est le plus petit avec le dénominateur le plus grand. 2) On additionne ou on soustrait les numérateurs. 3) On simplifie le résultat si possible.

$$3/4 + 5/12 = 9/12 + 5/12 = 14/12 = 7/6.$$

Avec un nombre entier On écrit l'entier sous forme de fraction : $1 - 3/8 = 8/8 - 3/8 = 5/8$; $2 + 1/3 = 6/3 + 1/3 = 7/3$.

Erreur fréquente Ne jamais additionner les dénominateurs ! $1/4 + 1/4 = 2/4 (= 1/2)$ et non $2/8$: deux quarts de pizza, c'est une demi-pizza, pas un huitième.

7. Résoudre un problème avec des fractions

Méthode 1) Lire et repérer le « tout ». 2) Faire un schéma (modèle en barres). 3) Additionner les fractions des parts connues. 4) Pour la part restante, calculer 1 moins cette fraction. 5) Si on connaît une quantité, retrouver la valeur d'une part puis du tout.

Exemple résolu Léo dépense $1/2$ de son argent au cinéma et $1/6$ en confiserie. Il lui reste 12 €. Quel était son budget ?
Dépensé : $1/2 + 1/6 = 3/6 + 1/6 = 4/6 = 2/3$. Il reste donc $1/3$ du budget. Si $1/3$ vaut 12 €, alors le budget est $3 \times 12 = 36$ €.

Budget de Léo

dépensé	dépensé	12 €
---------	---------	------

Trois parts égales : deux sont dépensées, la troisième (12 €) est ce qui reste.

Mathbot t'aide « Quand tu es perdu, dessine ! Une barre découpée en parts égales vaut mieux qu'un long discours. »

À retenir

- $a/b = a \div b$: une fraction est un quotient, et se place sur une droite graduée.
- Prendre b/c d'une quantité : on divise par c, puis on multiplie par b.
- On ne change pas une fraction en multipliant ou divisant ses deux termes par le même nombre ; on s'en sert pour simplifier.
- Repères : fraction < 1 si numérateur $<$ dénominateur ; fraction $< 1/2$ si le numérateur est inférieur à la moitié du dénominateur.
- Pour comparer, additionner ou soustraire, on met les fractions au même dénominateur.
- Même dénominateur : on calcule avec les numérateurs et on garde le dénominateur.
- Dans un problème : schéma en barres, puis $1 -$ (fractions déjà utilisées) pour la part restante.