

Fractions et nombres rationnels

Cours de maths - 4ème

En 5ème, tu as appris à calculer avec des fractions positives. Cette année, tu **élargis ton territoire** : le numérateur et le dénominateur peuvent être négatifs ou décimaux, et tu découvres les **nombres rationnels**. Tu vas apprendre à les **simplifier, comparer, additionner, soustraire, multiplier et diviser**, sans jamais te tromper de signe. Chaque partie se termine par une méthode à retenir.

1. Rappels : ce que tu sais déjà

Fraction partage Quand on partage une unité en b parts égales et qu'on en prend a , on obtient la fraction a/b . Le **dénominateur** b donne le nom de la part (huitièmes, cinquièmes...) ; le **numérateur** a donne leur nombre.



3 parts coloriées sur 8

Ce rectangle est partagé en 8 parts égales ; 3 sont coloriées : on a colorié $3/8$ du rectangle.

Rappels en vrac Les **multiples** et **diviseurs** d'un entier, les critères de divisibilité (par 2, 3, 5, 9, 10), l'égalité $2/3 = 4/6$ et l'addition de fractions de même dénominateur : $3/7 + 2/7 = 5/7$. Prendre $2/5$ de 30, c'est faire $30 \div 5 \times 2 = 12$.

2. Quotient et nombres rationnels

Quotient Soient a et b deux nombres, b étant **non nul**. Le quotient a/b est le nombre qui, **multiplié par b , donne a** : $a/b \times b = a$. On l'écrit aussi $a \div b$.

Exemple Le nombre qui, multiplié par 5, donne 2 est $2/5$, car $2/5 \times 5 = 2$. Le nombre qui, multiplié par 4, donne -3 est $-3/4 = -0,75$.

Vocabulaire Un **nombre rationnel** est un nombre qui peut s'écrire comme un quotient de deux nombres entiers relatifs (le dénominateur étant non nul). Une **fraction** est un quotient de deux entiers. Une **écriture fractionnaire** est un quotient dont le numérateur ou le dénominateur n'est pas forcément entier, par exemple $2,5/4$ ou $7/0,3$. Un **pourcentage** est une écriture fractionnaire de dénominateur 100 : $8\% = 8/100$.

Les entiers ($5 = \mathbf{5/1}$), les décimaux ($0,25 = \mathbf{1/4}$) et les fractions sont tous des nombres rationnels. En revanche, π n'est pas rationnel : aucun quotient d'entiers ne le donne exactement. On ne divise jamais par 0 : l'écriture $\mathbf{3/0}$ n'a pas de sens.

Signe d'un quotient Pour tous nombres a et b (b non nul) : $-\mathbf{a/b} = \mathbf{a/-b} = -\mathbf{a/b}$ et $-\mathbf{a/-b} = \mathbf{a/b}$. Un quotient est **positif** si numérateur et dénominateur ont le même signe, **négatif** s'ils ont des signes contraires.

Ramener le signe au numérateur On écrit toujours un dénominateur positif.
Exemples : $\mathbf{5/-8} = -\mathbf{5/8} = -\mathbf{5/8}$; $\mathbf{-7/-3} = \mathbf{7/3}$; $\mathbf{-2/-9} = \mathbf{2/9}$.

Piège Le signe « $-$ » devant une fraction porte sur toute la fraction : $-\mathbf{3/4} = -\mathbf{3/4}$, et **pas** $\mathbf{-3/-4}$ (qui, lui, vaut $+\mathbf{3/4}$).

3. Égalité de fractions et simplification

Propriété fondamentale On ne change pas un quotient en multipliant (ou en divisant) son numérateur et son dénominateur par un même nombre k non nul : $\mathbf{a \times k / b \times k} = \mathbf{a/b}$ et $\mathbf{a \div k / b \div k} = \mathbf{a/b}$.

Justification Pourquoi $\mathbf{3 \times 5 / 4 \times 5} = \mathbf{3/4}$? Parce que $\mathbf{15/20} \times 20 = 15$, et que $\mathbf{3/4} \times 20 = 15$ aussi : les deux nombres multipliés par 20 donnent 15, ils sont donc égaux.

Compléter une égalité de fractions On cherche par quel nombre on est passé d'un dénominateur à l'autre. $\mathbf{2,4/6} = \mathbf{?/15}$: $6 \times 2,5 = 15$; donc $? = 2,4 \times 2,5 = 6$. Ainsi $\mathbf{2,4/6} = \mathbf{6/15}$.

Égalité des produits en croix Pour b et d non nuls : $\mathbf{a/b} = \mathbf{c/d}$ équivaut à $a \times d = b \times c$.

Exemple $-\mathbf{6/9}$ et $\mathbf{2/-3}$ sont-ils égaux ? Produits en croix : $(-6) \times (-3) = 18$ et $9 \times 2 = 18$. Ils sont égaux, donc $-\mathbf{6/9} = \mathbf{2/-3}$. En revanche, $\mathbf{2/5}$ et $\mathbf{3/7}$: $2 \times 7 = 14$ et $5 \times 3 = 15$, ils sont différents.

Fraction irréductible Une fraction est **irréductible** quand on ne peut plus la simplifier, c'est-à-dire quand son numérateur et son dénominateur n'ont pas d'autre diviseur commun que 1.

Simplifier une fraction 1) On détermine le signe et on le place au numérateur. 2) On cherche un diviseur commun (critères de divisibilité, tables). 3) On divise en haut et en bas. 4) On recommence jusqu'à obtenir une fraction irréductible.

Exemple : $-\mathbf{84/126} = -\mathbf{84/126}$; 84 et 126 sont divisibles par 42 ($84 = 2 \times 42$ et 126

$= 3 \times 42$), donc $-84/126 = -2/3$.

Aller plus vite Si tu hésites sur le diviseur commun, divise par 2, par 3 ou par 5 plusieurs fois de suite. Le résultat est le même qu'en une seule étape avec le plus grand diviseur commun, c'est juste plus long ! Pour $90/150$: $\div 10$ donne $9/15$, puis $\div 3$ donne $3/5$.

Écriture fractionnaire à virgule Pour supprimer les virgules, on multiplie numérateur et dénominateur par 10, 100.... Exemple : $2,4/3,6 = 24/36 = 2/3$.

4. Comparer des nombres rationnels

Même dénominateur positif Si $b > 0$, deux quotients a/b et c/b sont rangés dans le même ordre que leurs numérateurs a et c . Les nombres négatifs sont rangés « à l'envers » de leur valeur absolue : $-9 < -6$.

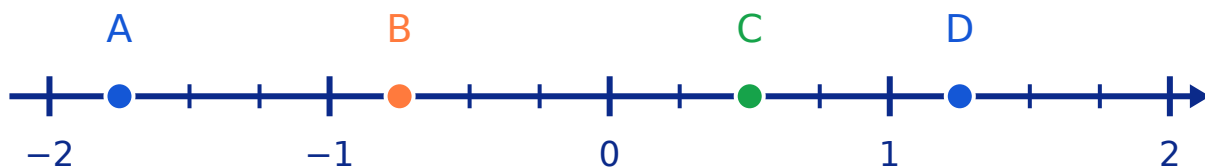
Comparer deux fractions 1) On met les signes au numérateur (dénominateur > 0). 2) On réduit au même dénominateur (un multiple commun, le plus petit si possible). 3) On compare les numérateurs.

Exemple : $5/6$ et $7/9$: dénominateur commun 18, $5/6 = 15/18$ et $7/9 = 14/18$. Comme $15 > 14$, $5/6 > 7/9$.

Avec des nombres négatifs Comparons $-3/8$ et $-5/12$. Dénominateur commun 24 : $-3/8 = -9/24$ et $-5/12 = -10/24$. Comme $-9 > -10$, on a $-3/8 > -5/12$.

Piège classique Parmi deux nombres négatifs, le plus grand est celui qui est le plus proche de 0. Donc $-1/2$ est plus grand que $-3/4$, même si $1 < 3$ est « vrai » pour les numérateurs de départ.

Sur une droite graduée, plus un nombre est à droite, plus il est grand. Ici une unité est partagée en 4 : $A = -7/4$, $B = -3/4$, $C = 1/2$ et $D = 5/4$.



On lit $A < B < C < D$: $-7/4 < -3/4 < 1/2 < 5/4$. Le point C est au milieu entre 0 et 1.

5. Additionner et soustraire

Même dénominateur Pour b non nul : $a/b + c/b = a+c/b$ et $a/b - c/b = a-c/b$. On additionne (ou soustrait) les numérateurs, on garde le dénominateur.

Dénominateurs différents 1) On cherche un multiple commun aux dénominateurs (le plus petit possible). 2) On réécrit chaque fraction avec ce dénominateur. 3) On additionne ou soustrait les numérateurs. 4) On simplifie si possible.

Exemple résolu $7/10 + 4/15$: le plus petit multiple commun de 10 et 15 est 30. $7/10 = 21/30$ et $4/15 = 8/30$; donc $7/10 + 4/15 = 29/30$.

Avec un négatif : $-3/5 + 1/2 = -6/10 + 5/10 = -1/10$.

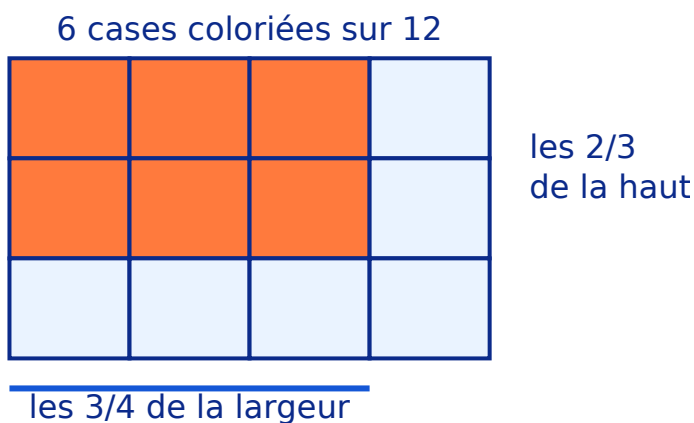
Soustraire = ajouter l'opposé $a - b = a + (-b)$. Ainsi $1/6 - 5/6 = 1 - 5/6 = -4/6 = -2/3$. Si tu soustrais une fraction négative, deux signes « - » se transforment en « + » : $1/4 - (-1/2) = 1/4 + 1/2 = 3/4$.

Erreur à ne jamais faire $1/2 + 1/3$ n'est pas égal à $2/5$! On n'additionne **jamais** les dénominateurs. Le bon calcul : $3/6 + 2/6 = 5/6$.

6. Multiplier

Produit de deux quotients Pour b et d non nuls : $a/b \times c/d = a \times c / b \times d$. On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux. Pour un entier : $n \times a/b = n \times a / b$.

Une figure aide à comprendre : prendre les $2/3$ des $3/4$ d'un rectangle revient à colorier 6 cases sur 12.



$$2/3 \times 3/4 = 6/12 = 1/2 : \text{le produit donne bien 6 cases sur 12.}$$

Méthode soignée : signe d'abord, simplification ensuite 1) On détermine le **signe** du produit : positif s'il y a un nombre pair de facteurs négatifs, négatif sinon. 2) On **simplifie avant de multiplier**. 3) On multiplie.

Exemple : $-7/12 \times 8/21$ est négatif. Comme $7 \times 3 = 21$ et $12 = 4 \times 3$, $8 = 4 \times 2$: $7 \times 8 / 12 \times 21 = 7 \times 4 \times 2 / 4 \times 3 \times 7 \times 3 = 2/9$. Donc $-7/12 \times 8/21 = -2/9$.

Multiplier ne veut pas toujours dire « agrandir » Multiplier un nombre positif par

une fraction inférieure à 1 donne un résultat plus petit : $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8} < \frac{3}{4}$.
Multiplier par une fraction supérieure à 1 l'agrandit : $\frac{3}{4} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{4}$.

7. Inverse et division

Inverse Deux nombres sont **inverses** l'un de l'autre quand leur produit vaut 1.
L'inverse d'un nombre non nul x est $\frac{1}{x}$. L'inverse de $\frac{a}{b}$ (a et b non nuls) est $\frac{b}{a}$. Le nombre 0 n'a pas d'inverse.

Exemples L'inverse de 7 est $\frac{1}{7}$; celui de $\frac{3}{5}$ est $\frac{5}{3}$; celui de -4 est $-\frac{1}{4}$; celui de $-\frac{2}{9}$ est $-\frac{9}{2}$; celui de 0,5 est 2. Vérification : $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{15}{15} = 1$.

Diviser, c'est multiplier par l'inverse Pour b, c et d non nuls : $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

Exemple résolu $\frac{3}{4} \div \frac{5}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{5} = \frac{24}{20} = \frac{6}{5}$. Et avec un négatif : $-\frac{2}{3} \div \frac{4}{9} = -\frac{2}{3} \times \frac{9}{4} = -\frac{18}{12} = -\frac{3}{2}$.

Mathbot dit « Pour diviser par une fraction, je la retourne et je multiplie ! Mais je vérifie toujours que je ne retourne pas la première fraction. Seul le diviseur est inversé. »

Cas des entiers : $6 \div \frac{3}{5} = 6 \times \frac{5}{3} = 10$, et $\frac{5}{8} \div 10 = \frac{5}{8} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{16}$.

8. Priorités opératoires et problèmes

Ordre des calculs Comme avec les entiers : 1) on calcule d'abord dans les **parenthèses** (de l'intérieur vers l'extérieur) ; 2) puis les **multiplications et divisions**, de gauche à droite ; 3) enfin les **additions et soustractions**, de gauche à droite.

Exemple résolu $A = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$. On commence par la multiplication : $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Puis $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.
 $B = (\frac{5}{6} - \frac{1}{3}) \div \frac{2}{9}$. Parenthèses : $\frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Puis $B = \frac{1}{2} \div \frac{2}{9} = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} = \frac{9}{4}$.

Résoudre un problème avec des fractions 1) Repère le **tout** (l'unité de référence). 2) Traduis chaque partie par une fraction de ce tout. 3) « Prendre la fraction $\frac{a}{b}$ d'une quantité » se calcule en multipliant cette quantité par $\frac{a}{b}$. 4) Conclut par une phrase avec l'unité.

Exemple : un trajet de 90 km dont on a parcouru $\frac{2}{5}$; distance parcourue : $\frac{2}{5} \times 90 = 36$ km ; il reste 54 km.

Vérifier avec une droite ou un dessin Une fraction de fraction (« les **3/4** du reste ») se visualise très bien avec un rectangle partagé. Un résultat négatif dans un problème de partage doit t'alerter : il y a un signe oublié.

À retenir

- Le quotient **a/b** (b non nul) est le nombre qui, multiplié par b , donne a . Un nombre rationnel est un nombre qui s'écrit comme quotient de deux entiers relatifs.
- **$-a/b = a/-b = -a/b$** et **$-a/-b = a/b$** : on ramène toujours le signe au numérateur.
- **$a \times k / b \times k = a/b$** : on simplifie jusqu'à une fraction irréductible. Égalité : **$a/b = c/d$** équivaut à $a \times d = b \times c$.
- Pour comparer, additionner ou soustraire : même dénominateur positif d'abord ; pour b non nul, **$a/b + c/b = a+c/b$** .
- **$a/b \times c/d = a \times c / b \times d$** : signe d'abord, simplification avant de multiplier.
- L'inverse de **a/b** est **b/a** ; diviser par une fraction, c'est multiplier par son inverse. Le nombre 0 n'a pas d'inverse.
- Priorités : parenthèses, puis multiplications et divisions, puis additions et soustractions.