

Généralités sur les fonctions et fonctions de référence

Corrigé des exercices - 2de

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Calculer des images ★★★

- a. $f(2) = 3 \times 2 - 5 = 6 - 5 = \mathbf{1}$. $f(-1) = 3 \times (-1) - 5 = -3 - 5 = \mathbf{-8}$. $f(0) = -5$.
 $f(\mathbf{1/3}) = 3 \times \mathbf{1/3} - 5 = 1 - 5 = \mathbf{-4}$.
- b. On résout $3x - 5 = 7 : 3x = 12$, donc $x = 4$. L'antécédent de 7 est **4** (vérification : $f(4) = 12 - 5 = 7$).
- c. On résout $3x - 5 = 0 : 3x = 5$, donc $x = \mathbf{5/3}$. L'antécédent de 0 est **5/3**.

2 Des carrés plus un ★★★

- a. $g(3) = 9 + 1 = \mathbf{10}$. $g(-3) = (-3)^2 + 1 = 9 + 1 = \mathbf{10}$. $g(0) = \mathbf{1}$. $g(\mathbf{1/2}) = \mathbf{1/4} + 1 = \mathbf{5/4}$.
- b. D'après a., $g(3) = g(-3) = 10 : \mathbf{3 \text{ et } -3}$ sont deux antécédents de 10.
- c. $g(x) = 0$ s'écrit $x^2 + 1 = 0$, soit $x^2 = -1$, impossible car un carré est positif ou nul. Pour tout x , $g(x) \geq 1$. **Non**, 0 n'a pas d'antécédent.
- d. $x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$. Les antécédents de 5 sont **2 et -2**.

3 Lire sur une courbe ★★★

- a. On lit : $h(0) = \mathbf{0}$, $h(1) = \mathbf{-1}$, $h(-1) = \mathbf{1}$, $h(2) = \mathbf{1}$.
- b. La droite $y = 1$ coupe la courbe en deux points d'abscisses -1 et 2 : les antécédents de 1 sont **-1 et 2**.
- c. La courbe coupe l'axe des abscisses en trois points : $x \approx -1,7$, $x = 0$ et $x \approx 1,7$. Antécédents de 0 : **-1,7 ; 0 ; 1,7** (valeurs approchées au dixième).
- d. La droite $y = 0,5$ coupe la courbe en **3 points** : 0,5 a donc 3 antécédents. La courbe reste entre -1 et 1 , donc la droite $y = 3$ ne la rencontre pas : 3 n'a **aucun antécédent**.

4 Ensembles de définition ★★★

- a. Il faut $x - 2 \neq 0$, donc $x \neq 2$. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} = \mathbf{]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[}$.
- b. Il faut $x + 3 \geq 0$, donc $x \geq -3$. $D_g = \mathbf{[-3 ; +\infty[}$.

- c. Une formule sans division ni racine : $D_h = \mathbb{R}$.
- d. Un carré est positif ou nul, donc $x^2 + 1 \geq 1$ et ne s'annule jamais. $D_k = \mathbb{R}$.
- e. Il faut $6 - 2x \geq 0$, donc $-2x \geq -6$, donc $x \leq 3$ (on divise par -2 : le sens change).
 $D_m =]-\infty ; 3]$.
- f. Il faut $2x + 8 \neq 0$, donc $2x \neq -8$, donc $x \neq -4$. $D_n = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

5 Le rectangle de périmètre 20 cm ★★★

- a. Le demi-périmètre vaut $20 \div 2 = 10$ cm. Largeur + longueur = 10, donc longueur = $10 - x$. Aire = largeur $\times$ longueur : **$A(x) = x(10 - x)$** .
- b. Les deux dimensions sont positives : $x \geq 0$ et $10 - x \geq 0$. L'ensemble de définition est **$[0 ; 10]$** .
- c. $A(3) = 3 \times 7 = 21$ et $A(5) = 5 \times 5 = 25$. $A(5)$ est l'aire du carré de côté 5 cm : 25 cm².
- d. $A(4) = 4 \times 6 = 24$ et $A(6) = 6 \times 4 = 24$. Donc **4 et 6 sont deux antécédents de 24** (deux rectangles différents, de même aire : 4 cm sur 6 cm, et 6 cm sur 4 cm).

6 Le point est-il sur la courbe ? ★★★

On calcule f de l'abscisse et on compare à l'ordonnée.

- $f(2) = 4 - 6 + 1 = -1$: **$A \in C_f$** .
- $f(-1) = 1 + 3 + 1 = 5 \neq 4$: **$B \notin C_f$** .
- $f(0) = 1$: **$C \in C_f$** .
- $f(3) = 9 - 9 + 1 = 1 \neq 2$: **$D \notin C_f$** .
- $f(4) = 16 - 12 + 1 = 5$: **$E \in C_f$** .

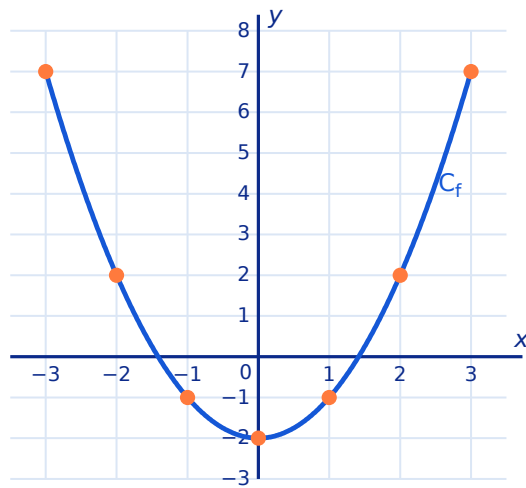
7 Retrouver une fonction affine ★★★

- a. $f(x) = ax + b$ avec $b = f(0) = 2$. Puis $f(1) = a + 2 = 5$, donc $a = 3$. **$f(x) = 3x + 2$** .
- b. $a = \frac{-2 - 4}{3 - 1} = \frac{-6}{2} = -3$. Puis $4 = -3 \times 1 + b$, donc $b = 7$. **$g(x) = -3x + 7$** .
Vérification avec B : $g(3) = -9 + 7 = -2 \checkmark$.
- c. $k(x) = ax$ donc $4a = 10$ et $a = 2,5$. **$k(x) = 2,5x$** .

8 Tableau de valeurs et courbe ★★★

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	7	2	-1	-2	-1	2	7

- b. On place les sept points et on les relie par une courbe régulière : c'est une



parabole.

- c. La courbe semble symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ($f(-x) = f(x)$).
Les antécédents de 2 sont $x^2 - 2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$.

9 Équations et inéquations graphiques ★★★

On relève sur la figure les points remarquables : C_u coupe l'axe des abscisses en $(-2 ; 0)$ et $(2 ; 0)$, passe par $(-1 ; 3)$, $(0 ; 4)$, $(1 ; 3)$, et coupe d en $(-1 ; 3)$ et $(2 ; 0)$.

- $S = \{-2 ; 2\}$.
- La courbe est au-dessus de la droite $y = 3$ entre -1 et 1 : $S = [-1 ; 1]$.
- La courbe est strictement sous l'axe des abscisses pour $x < -2$ et $x > 2$: $S = [-3 ; -2[\cup]2 ; 3]$.
- Points communs de C_u et d : $S = \{-1 ; 2\}$. Vérification : $u(-1) = 3 = -(-1) + 2$ et $u(2) = 0 = -2 + 2$.
- C_u est en dessous de d (ou sur d) pour $x \leq -1$ et pour $x \geq 2$: $S = [-3 ; -1] \cup [2 ; 3]$.

10 La fonction inverse ★★★

- $1 \div x = 0,25$ donc $x = 1 \div 0,25 = 4$.
- $1 \div x = -2$ donc $x = 1/-2 = -0,5$.
- Si $x < 0$, alors $1/x < 0 < 1/2$: aucune solution négative. Si $x > 0$, la fonction inverse est décroissante sur $]0 ; +\infty[$ et $1/2 = f(2)$: $1/x \geq 1/2 \Leftrightarrow x \leq 2$. Donc $S =]0 ; 2]$.
- Si $x > 0$, $1/x > 0$: pas de solution. Si $x < 0$, l'inverse est décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et $1/-1 = -1$: $1/x < -1 \Leftrightarrow x > -1$. Donc $S =]-1 ; 0[$. Contrôle : $x = -0,5$ donne $1/x = -2 < -1 \checkmark$.

11 La racine carrée ★★★

- $\sqrt{x} = 5 \Leftrightarrow x = 5^2 = 25$ (et $25 \geq 0$).
- Il faut $2x - 1 \geq 0$, donc $x \geq 0,5$ (soit $1/2$). $D_f = [0,5 ; +\infty[$.

- c. $\sqrt{2x-1} = 3 \Leftrightarrow 2x-1 = 9 \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$. Vérification : $\sqrt{9} = 3 \checkmark$. $S = \{5\}$.
- d. La racine carrée est croissante et $\sqrt{4} = 2 : \sqrt{x} > 2 \Leftrightarrow x > 4$. $S =]4 ; +\infty[$.
- e. $\sqrt{9} = 3 : \sqrt{x} \leq 3 \Leftrightarrow x \leq 9$, et il faut $x \geq 0$. $S = [0 ; 9]$.

12 Paire, impaire ou ni l'une ni l'autre ? ★★★

- a. $\mathbb{R}$ est symétrique. $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 = x^4 - 3x^2 = f(x)$: **paire**.
- b. $g(-x) = 2(-x)^3 + (-x) = -2x^3 - x = -(2x^3 + x) = -g(x)$: **impaire**.
- c. $h(1) = 2$ et $h(-1) = 1 - 1 = 0$. $h(-1) \neq h(1)$ et $h(-1) \neq -h(1) = -2$: **ni paire ni impaire**.
- d. $\mathbb{R}^*$ est symétrique. $k(-x) = 4/-x = -4/x = -k(x)$: **impaire**.
- e. $[0 ; +\infty[$ n'est pas symétrique par rapport à 0 (2 y est, pas -2) : **ni paire ni impaire**.
- f. $p(-x) = 5 = p(x)$: **paire** (sa courbe est une droite horizontale, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées).

13 Compléter par symétrie ★★★

- a. f paire : $f(-x) = f(x)$. Donc $f(-1) = f(1) = 3$, $f(-2) = f(2) = -1$, $f(-3) = f(3) = 2$.
- b. Si f était impaire, on aurait $f(-0) = -f(0)$, soit $f(0) = -f(0)$, donc $f(0) = 0$. Or $f(0) = 1$: **f ne peut pas être impaire**.
- c. g impaire : $g(0) = 0$, $g(-1) = -g(1) = -2$, $g(-2) = -g(2) = 3$, $g(-3) = -g(3) = -1$.

14 Comparer sans calculatrice ★★★

- a. Le carré est décroissant sur $]-\infty ; 0]$ et $-3 < -2 \leq 0$, donc l'ordre est renversé : $(-3)^2 > (-2)^2$. Vérification : $9 > 4$.
- b. Le cube est croissant sur $\mathbb{R}$ et $1,5 > 1,2$, donc $1,5^3 > 1,2^3$ ($3,375 > 1,728$).
- c. L'inverse est décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et $-4 < -2 < 0$, donc $1/-4 > 1/-2$ ($-0,25 > -0,5$).
- d. La racine carrée est croissante sur $[0 ; +\infty[$ et $7 > 5$, donc $\sqrt{7} > \sqrt{5}$.
- e. Le carré est décroissant sur $]-\infty ; 0]$ et $-0,5 < -0,3$, donc $(-0,5)^2 > (-0,3)^2$, c'est-à-dire $(-0,3)^2 < (-0,5)^2$ ($0,09 < 0,25$).

15 Variations et signe de fonctions affines ★★★

- a. Pour f , $a = -2 < 0$: **décroissante**. Pour g , $a = 0,5 > 0$: **croissante**.
- b. $-2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$. f décroissante : positive avant 3, négative après.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
f(x)	signe +	0	signe -

- c. $0,5x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. g croissante : négative avant 2, positive après.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
g(x)	signe -	0	signe +

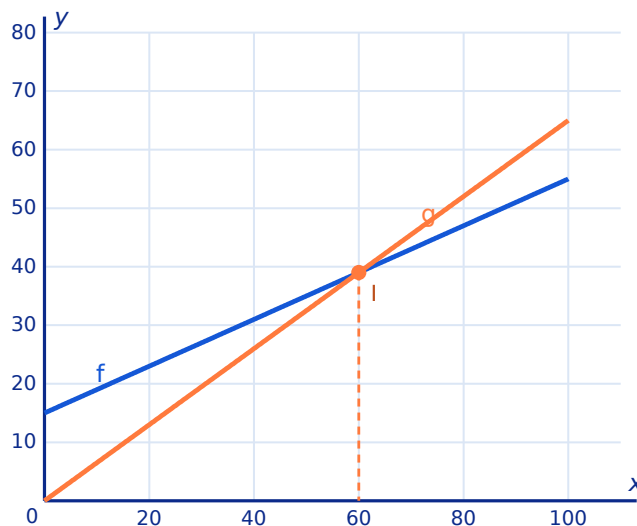
- d. $-2x + 6 > 0,5x - 1 \Leftrightarrow 7 > 2,5x \Leftrightarrow x < 2,8$. $S =]-\infty ; 2,8[$. Contrôle : en $x = 2,8$, $f(2,8) = 0,4 = g(2,8)$; en $x = 0$, $f(0) = 6 > g(0) = -1$ ✓.

16 Vrai ou faux ? ★★★

- a. **Vrai** : c'est la définition d'une fonction (une seule image pour chaque x de D).
- b. **Faux** : -4 n'a pas d'antécédent, car $x^2 = -4$ est impossible.
- c. **Faux** : elle est décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$ séparément. Contre-exemple : $-1 < 1$ mais $\mathbf{1/-1 = -1 < 1 = 1/1}$.
- d. **Faux** : pour $x = -3$, $\sqrt{((-3)^2)} = \sqrt{9} = 3 \neq -3$. L'égalité est vraie seulement pour $x \geq 0$.
- e. **Vrai** : $(-x)^3 = -x^3$, donc le cube est impair et sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.

17 Deux tarifs de location ★★★

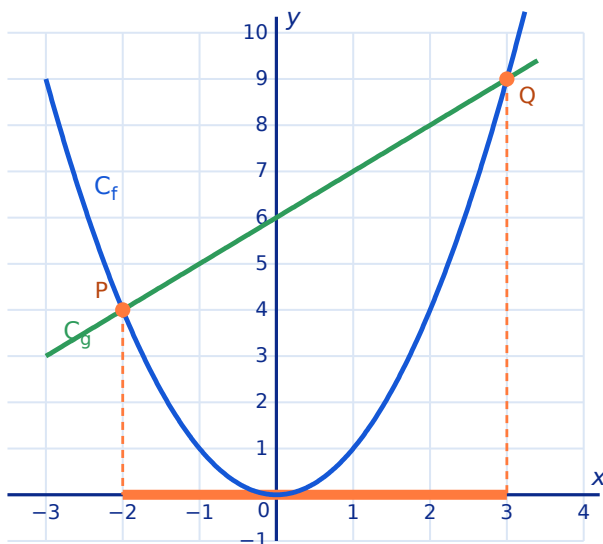
- a. $\mathbf{f(d) = 0,4d + 15}$ et $\mathbf{g(d) = 0,65d}$: f est affine, g est linéaire.
- b. $f(40) = 16 + 15 = 31$ € et $g(40) = 26$ €. Pour 40 km, le **tarif B** est le moins cher.
- c. $0,4d + 15 = 0,65d \Leftrightarrow 15 = 0,25d \Leftrightarrow d = 60$. Pour 60 km, les deux tarifs coûtent 39 € : c'est l'abscisse du point d'intersection I des deux droites.



- d. $f(d) < g(d) \Leftrightarrow 0,4d + 15 < 0,65d \Leftrightarrow 15 < 0,25d \Leftrightarrow d > 60$. Le **tarif A** est avantageux dès que la distance dépasse **60 km** (graphiquement : la droite de f passe sous celle de g après I).

18 Parabole et droite ★★★

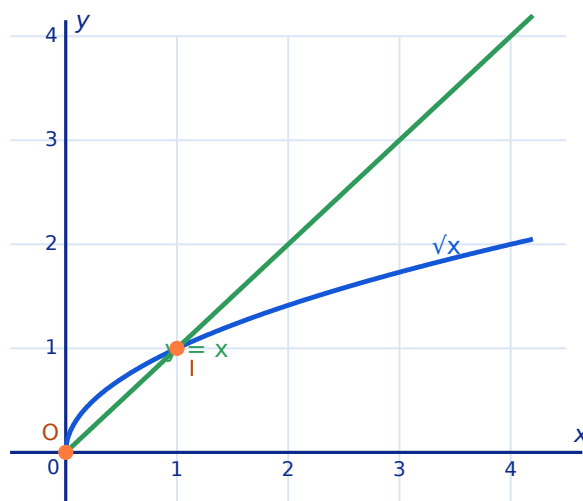
- a. Tableau de valeurs de f : $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ donne 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9. La droite g passe par (0 ; 6) et (3 ; 9), par exemple.



- b. On lit deux points d'intersection P et Q d'abscisses -2 et 3 . Vérification : $f(-2) = 4 = -2 + 6 = g(-2) \checkmark$ et $f(3) = 9 = 3 + 6 = g(3) \checkmark$. Donc $S = \{-2 ; 3\}$. (Il n'y en a pas d'autre : une droite coupe une parabole en au plus deux points.)
- c. La parabole est sous la droite entre P et Q : $f(x) < g(x)$ pour $S =]-2 ; 3[$. Elle est au-dessus ou sur la droite ailleurs : $f(x) \geq g(x)$ pour $S =]-\infty ; -2] \cup [3 ; +\infty[$.

19 Racine carrée et droite $y = x$ ★★★

- a. Quelques points de $\sqrt{x}$: $(0 ; 0)$, $(1 ; 1)$, $(4 ; 2)$, $(0,25 ; 0,5)$. Les deux courbes se



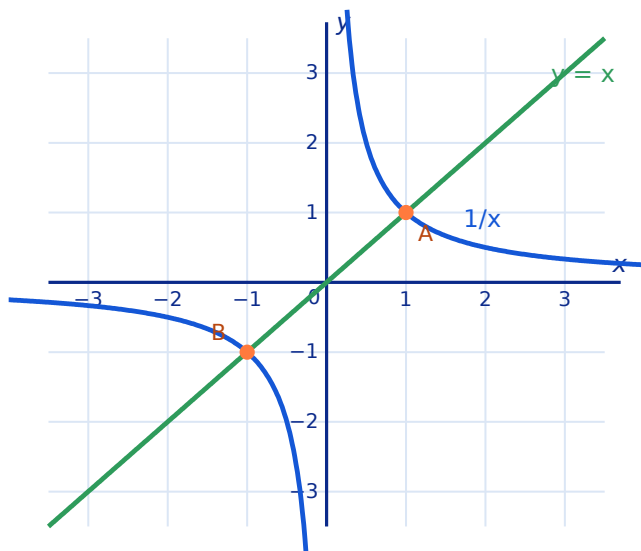
coupent en $O(0 ; 0)$ et $I(1 ; 1)$.

- b. Pour $x \geq 0$, les deux membres de $\sqrt{x} = x$ sont positifs ; on peut élever au carré sans perdre d'équivalence : $\sqrt{x} = x \Leftrightarrow x = x^2$. Donc $x^2 - x = 0$, $x(x - 1) = 0$, $x = 0$ ou $x = 1$. $S = \{0 ; 1\}$.
- c. La courbe de $\sqrt{x}$ est au-dessus de la droite entre les deux points communs : $\sqrt{x} > x$ pour $S =]0 ; 1[$, et au-dessous après : $\sqrt{x} < x$ pour $S =]1 ; +\infty[$. Vérification : $\sqrt{0,25} = 0,5 > 0,25 \checkmark$ et $\sqrt{4} = 2 < 4 \checkmark$.

20 Inverse contre identité ★★★

- a. Pour $x \neq 0$: $1/x = x \Leftrightarrow 1 = x^2$ (on multiplie par x). Donc $x = 1$ ou $x = -1$: les

courbes se coupent en $A(1 ; 1)$ et $B(-1 ; -1)$.



- b. L'hyperbole est au-dessus de la droite : pour $x < -1$ (branche de gauche) et pour $0 < x < 1$ (branche de droite, près de l'axe des ordonnées). $S =]-\infty ; -1[\cup]0 ; 1[$.
- c. $x = -2 : 1/-2 = -0,5 > -2 \checkmark$ (dans S). $x = -0,5 : 1/-0,5 = -2 < -0,5 \times$ (hors S). $x = 0,5 : 2 > 0,5 \checkmark$ (dans S). $x = 3 : 1/3 \approx 0,33 < 3 \times$ (hors S). Les quatre tests confirment le résultat.

21 Démontrer une parité ★★★

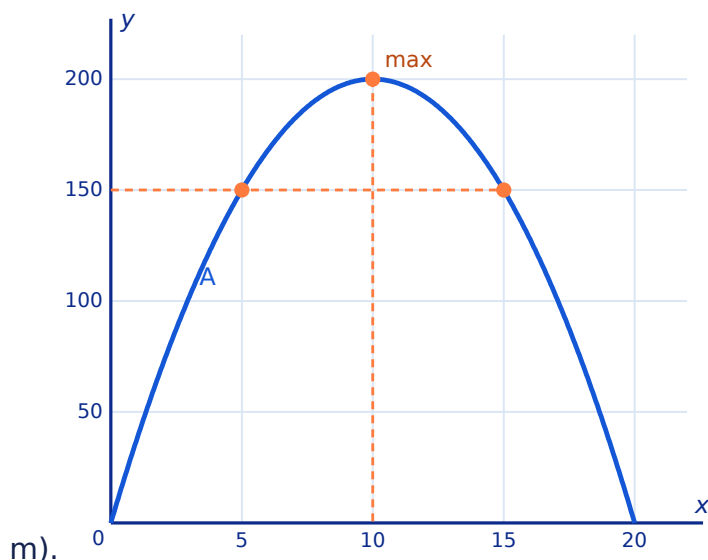
- a. $x^2 + 1 \geq 1$, donc $D_f = \mathbb{R}$, symétrique par rapport à 0. $f(-x) = (-x)^3/(-x)^2 + 1 = -x^3/x^2 + 1 = -f(x)$. **f est impaire.**
- b. $x^2 + 4 > 0$, donc $D_g = \mathbb{R}$. $g(-x) = (-x)^2 - 1/(-x)^2 + 4 = x^2 - 1/x^2 + 4 = g(x)$. **g est paire.**
- c. $D_h = \mathbb{R}^*$, symétrique. $h(-x) = -x + 1/-x = -x - 1/x = -(x + 1/x) = -h(x)$. **h est impaire.**
- d. $D_k = \mathbb{R}^*$, symétrique. $k(1) = 1 + 1 = 2$ et $k(-1) = 1 - 1 = 0$. $k(-1) \neq k(1)$ et $k(-1) \neq -k(1) = -2$. **k n'est ni paire ni impaire** (un contre-exemple suffit).

22 L'enclos le plus grand ★★★

- a. Le grillage mesure 40 m : $x + x + (\text{côté parallèle}) = 40$, donc le côté parallèle mesure **$40 - 2x$** . Les longueurs sont positives : $x \geq 0$ et $40 - 2x \geq 0$, soit $x \leq 20$. A est définie sur **$[0 ; 20]$** .
- b. Aire = $x \times (40 - 2x)$: **$A(x) = x(40 - 2x)$** .
- c. $A(5) = 5 \times 30 = 150$; $A(10) = 10 \times 20 = 200$; $A(15) = 15 \times 10 = 150$; $A(0) = 0$; $A(20) = 20 \times 0 = 0$.
- d. On a trouvé $A(5) = A(15) = 150$. De fait, $x(40 - 2x) = 150 \Leftrightarrow -2x^2 + 40x - 150 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 20x + 75 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x - 15) = 0 : S = \{5 ; 15\}$. Les solutions sont symétriques par rapport à 10 ($5 = 10 - 5$ et $15 = 10 + 5$).

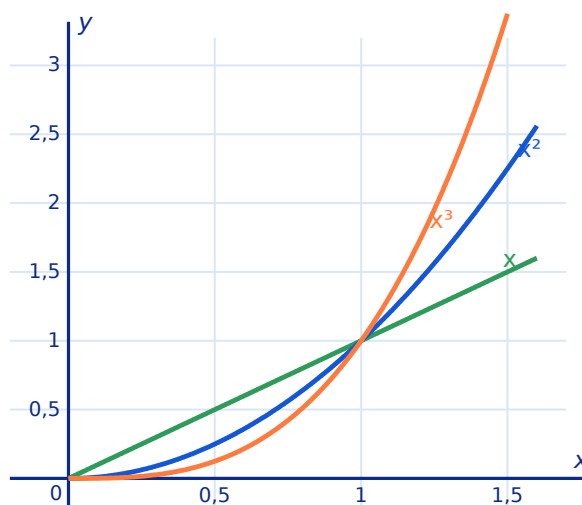
x	0	5	10	15	20
A(x)	0	150	200	150	0

- e. La courbe (une parabole) monte jusqu'à $x = 10$ puis redescend symétriquement : le maximum semble atteint pour $x = 10$, avec $A = 200 \text{ m}^2$ (enclos de 10 m sur 20 m).



23 Ranger x , x^2 et x^3 ★★★

- a. Pour $x = 0,5$: $x = 0,5$, $x^2 = 0,25$, $x^3 = 0,125$, donc $x^3 < x^2 < x$. Pour $x = 2$: $x = 2$, $x^2 = 4$, $x^3 = 8$, donc $x < x^2 < x^3$. **L'ordre s'inverse !**
- b. $x^3 = x^2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$. De même, $x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$. Les trois courbes se rencontrent donc



exactement en $O(0 ; 0)$ et $A(1 ; 1)$.

- c. Entre ces deux points, la courbe de x est la plus haute et celle de x^3 la plus basse : pour $0 < x < 1$, $x^3 < x^2 < x$. Après le point A, l'ordre est inversé : pour $x > 1$, $x < x^2 < x^3$. Moralité : élever au carré un nombre compris entre 0 et 1 le rapetisse, alors qu'un nombre supérieur à 1 grossit.