

Généralités sur les fonctions et fonctions de référence

Cours de maths - 2de

Une fonction, c'est une **machine à transformer les nombres** : tu lui donnes un nombre, elle t'en renvoie un autre, toujours le même pour le même nombre de départ. Les fonctions servent à décrire une aire qui change quand on déplace un point, un prix qui dépend d'une durée, une température qui évolue au cours de la journée. En 2de, tu apprends à les manipuler avec précision : leur ensemble de définition, leurs images et leurs antécédents, leur courbe, la résolution graphique d'équations et d'inéquations, puis les **fonctions de référence** (affines, carré, cube, inverse, racine carrée) et la **parité**.

Rappels utiles

Un **intervalle** est noté avec des crochets : $[2 ; 5]$ contient 2 et 5 ; $]2 ; 5[$ ne les contient pas ; $] -\infty ; 3]$ va de « très négatif » jusqu'à 3 inclus. Les crochets sont toujours tournés vers l'intérieur de l'intervalle quand le nombre est inclus, vers l'extérieur sinon. $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble de tous les nombres réels et $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des réels privés de 0. Le symbole $\cup$ signifie « réunion » : $] -\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ est l'ensemble des réels différents de 0.

1. Qu'est-ce qu'une fonction ?

Fonction

Soit D une partie de $\mathbb{R}$. Une **fonction** f définie sur D associe à **chaque** nombre x de D **un seul** nombre réel, noté $f(x)$. On écrit $f : x \mapsto f(x)$. Le nombre x est la **variable** ; le nombre $f(x)$ est l'**image** de x par f .

Une fonction peut être donnée de trois façons : par une **formule** ($f(x) = 3x^2 - 1$), par un **tableau de valeurs**, ou par une **courbe**. Voici un tableau de valeurs de la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 - 1$:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	7	1	-1	1	7

Ici, 7 est l'image de 2 et aussi l'image de -2 : deux nombres différents peuvent avoir la

même image. En revanche, un nombre x ne peut jamais avoir deux images différentes : c'est ce qui fait de f une fonction.

Exemple : une fonction qui vient de la géométrie

Un carré de côté x cm a pour aire $A(x) = x^2$ (en cm^2). Pour un côté de 3 cm, l'aire est $A(3) = 9 \text{ cm}^2$. La fonction A associe à la longueur du côté l'aire du carré. Elle n'a de sens que pour $x \geq 0$: une longueur n'est pas négative.

Piège

L'écriture $f(x)$ ne signifie **pas** « f multiplié par x » ! Elle se lit « f de x » et désigne le résultat obtenu quand on applique la fonction f au nombre x . Calculer $f(4)$, c'est remplacer x par 4 dans la formule, en gardant les parenthèses pour les nombres négatifs : si $f(x) = x^2 + x$, alors $f(-3) = (-3)^2 + (-3) = 9 - 3 = 6$.

2. Ensemble de définition

Ensemble de définition

L'**ensemble de définition** d'une fonction f est l'ensemble D_f des nombres réels x pour lesquels $f(x)$ existe. C'est « la liste des nombres que la machine accepte ».

Quand la fonction est donnée par une formule, il faut surveiller deux interdits :

- on ne **divise jamais par 0** : le dénominateur doit être différent de 0 ;
- on ne prend pas la **racine carrée d'un nombre négatif** : ce qui est sous le radical doit être positif ou nul.

Méthode : trouver un ensemble de définition

1. Repère les divisions et les racines carrées dans la formule.
2. Écris la condition : « dénominateur $\neq 0$ » ou « expression sous la racine ≥ 0 ».
3. Résous cette condition.
4. Conclut avec une phrase et un intervalle ou « $\mathbb{R}$ privé de ... ».

Exemples résolus

- $f(x) = \frac{3}{x-4}$: le dénominateur s'annule pour $x = 4$. Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\} =]-\infty ; 4[\cup]4 ; +\infty[$.
- $g(x) = \sqrt{2x + 6}$: il faut $2x + 6 \geq 0$, c'est-à-dire $2x \geq -6$, donc $x \geq -3$. Donc $D_g = [-3 ; +\infty[$.

- $h(x) = 5x^2 - x + 7$: aucune division, aucune racine. Donc $D_h = \mathbb{R}$.

Piège

Dans un problème concret, l'ensemble de définition est parfois plus petit que ce que la formule autorise. Si x est la largeur d'un rectangle de périmètre 20 cm, son aire $x(10 - x)$ est calculable pour tout réel x , mais la situation impose $0 \leq x \leq 10$: on travaille sur $[0 ; 10]$.

3. Image et antécédent

Image et antécédent

Si $y = f(x)$, on dit que y est l'**image** de x par f et que x est **un antécédent** de y par f .
Un nombre de D a **une seule** image, mais un nombre y peut avoir **zéro, un ou plusieurs** antécédents.

Méthode (par le calcul)

- **Image de a** : on calcule $f(a)$ en remplaçant x par a .
- **Antécédents de k** : on résout l'équation $f(x) = k$; chaque solution appartenant à D_f est un antécédent.

Exemple

Soit $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ sur $[-2 ; 4]$.

Image de 2 : $f(2) = -4 + 4 + 3 = 3$. Image de -1 : $f(-1) = -1 - 2 + 3 = 0$.

Antécédents de 3 : on résout $-x^2 + 2x + 3 = 3$, soit $-x^2 + 2x = 0$, soit $x(-x + 2) = 0$.
Un produit est nul quand l'un de ses facteurs est nul : $x = 0$ ou $x = 2$. Le nombre 3 a donc **deux antécédents** : 0 et 2.

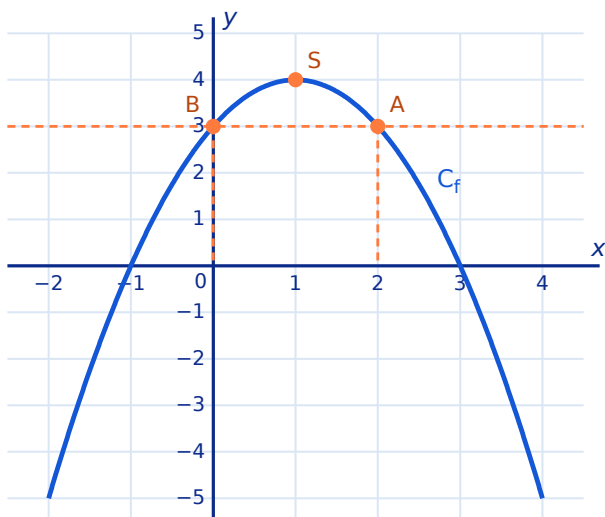
4. Courbe représentative

Courbe représentative

Dans un repère, la **courbe représentative** C_f d'une fonction f est l'ensemble des points $M(x ; f(x))$ où x décrit D_f . On dit que C_f a pour équation $y = f(x)$.

Appartenance à la courbe

Un point $M(a ; b)$ appartient à C_f si et seulement si $a \in D_f$ et $b = f(a)$.



Méthode : lire une image et des antécédents sur la courbe

- **Image de a** : on part de a sur l'axe horizontal, on monte (ou on descend) jusqu'à la courbe, puis on lit l'ordonnée du point trouvé.
- **Antécédents de k** : on trace la droite horizontale d'ordonnée k ; les abscisses de ses points communs avec la courbe sont les antécédents de k.

Sur la figure, la droite $y = 3$ coupe la courbe en $A(2 ; 3)$ et $B(0 ; 3)$: les antécédents de 3 sont bien 0 et 2, comme on l'a trouvé par le calcul.

Le point est-il sur la courbe ?

Pour la même fonction f : le point $P(4 ; -5)$ appartient à C_f car $f(4) = -16 + 8 + 3 = -5$.
Le point $Q(3 ; 2)$ n'y appartient pas car $f(3) = -9 + 6 + 3 = 0$ et $0 \neq 2$.

Méthode : tracer une courbe point par point

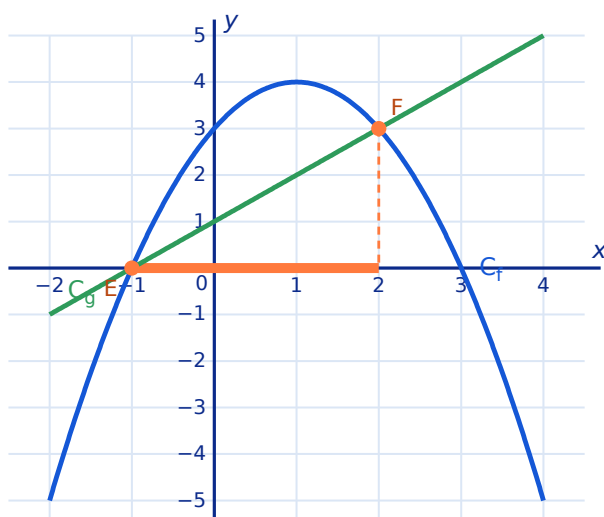
1. Dresse un tableau de valeurs avec quelques valeurs de x bien choisies dans D_f .
2. Place les points $(x ; f(x))$ dans un repère bien gradué.
3. Relie-les par une courbe **régulière**, sans angle ni coup de crayon brusque (sauf si la fonction le justifie).

Plus tu places de points, plus ta courbe est fiable !

5. Résoudre graphiquement équations et inéquations

Dictionnaire graphique

- Résoudre $f(x) = k$: abscisses des points communs de C_f et de la droite horizontale $y = k$.
- Résoudre $f(x) < k$ (ou $\leq$) : abscisses des points de C_f situés **strictement en dessous** (ou en dessous ou sur) de la droite $y = k$.
- Résoudre $f(x) = g(x)$: abscisses des points communs de C_f et de C_g .
- Résoudre $f(x) > g(x)$ (ou $\geq$) : abscisses des points où C_f est **strictement au-dessus** (ou au-dessus ou sur) de C_g .



Exemple

Avec $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ sur $[-2 ; 4]$ et $g(x) = x + 1$:

- $f(x) = 3$: on lit $S = \{0 ; 2\}$.
- $f(x) \geq 0$: la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses entre -1 et 3 ; $S = [-1 ; 3]$.
- $f(x) = g(x)$: les courbes se coupent en $E(-1 ; 0)$ et $F(2 ; 3)$; $S = \{-1 ; 2\}$.
- $f(x) > g(x)$: C_f est au-dessus de C_g entre les deux points d'intersection (segment orange) ; $S =]-1 ; 2[$.

Pièges

1) Une lecture graphique donne des valeurs **approchées**, sauf si on les confirme par le calcul (ici on peut vérifier : $f(-1) = 0 = g(-1)$). 2) Les solutions d'une inéquation sont des **abscisses** (valeurs de x), pas des ordonnées. 3) Avec une inégalité stricte, les crochets sont tournés vers l'extérieur ; avec une inégalité large, vers l'intérieur. 4) Pense à rédiger : « par lecture graphique, l'ensemble des solutions est ... ».

6. Fonctions affines, linéaires et constantes

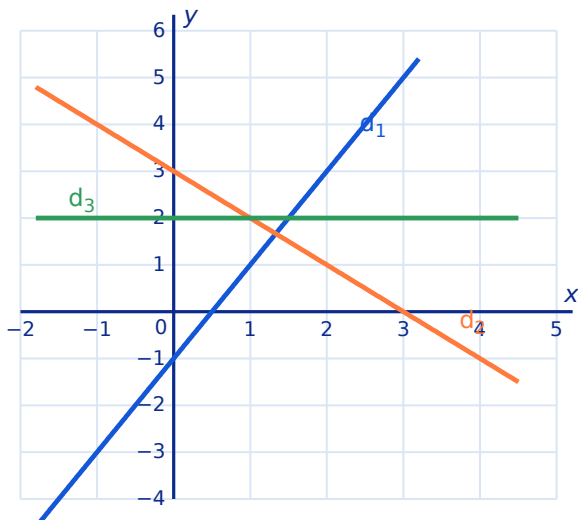
Fonction affine

Une **fonction affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, où a et b sont deux réels. Le nombre a est le **coefficient directeur** (ou pente), le nombre b est l'**ordonnée à l'origine**. Si $b = 0$, $f(x) = ax$ est **linéaire** ; si $a = 0$, $f(x) = b$ est **constante**.

Courbe et variations

La courbe d'une fonction affine est une **droite** qui passe par le point $(0 ; b)$. Pour deux points distincts $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ de cette droite : $a = (y_B - y_A) \div (x_B - x_A)$. Si $a > 0$, f est **strictement croissante** ; si $a < 0$, elle est **strictement décroissante** ; si $a = 0$, elle est constante.

Démonstration (variations). Soient $x_1 < x_2$ deux réels. Alors $f(x_2) - f(x_1) = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = a(x_2 - x_1)$. Comme $x_2 - x_1 > 0$, cette différence a le signe de a . Si $a > 0$, $f(x_2) > f(x_1)$: f est croissante ; si $a < 0$, $f(x_2) < f(x_1)$: f est décroissante.



Méthode : trouver la fonction affine qui passe par deux points

1. Calcule $a = (\text{différence des ordonnées}) \div (\text{différence des abscisses})$.
2. Remplace x et y par les coordonnées d'un des points dans $y = ax + b$ et résous pour trouver b .
3. Vérifie avec l'autre point.

Exemple : $A(1 ; 5)$ et $B(4 ; 11)$. $a = (11 - 5) \div (4 - 1) = 2$. Puis $5 = 2 \times 1 + b$ donc $b = 3$. La fonction est $f(x) = 2x + 3$. Vérification : $f(4) = 11 \checkmark$.

Signe de $ax + b$

Pour $f(x) = 2x + 3$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1,5$. Comme $a = 2 > 0$, f est croissante : négative avant $-1,5$, positive après.

x	$-\infty$	-1,5	$+\infty$
$2x + 3$	signe -	0	signe +

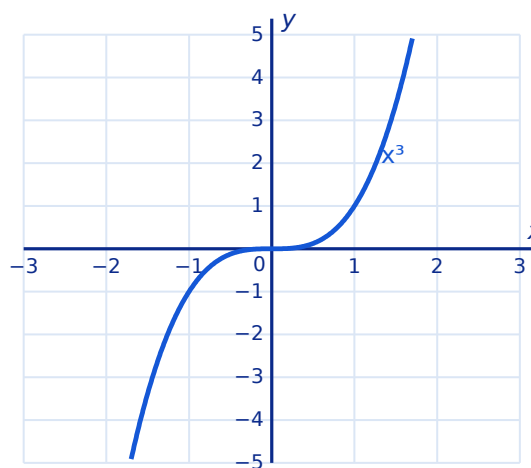
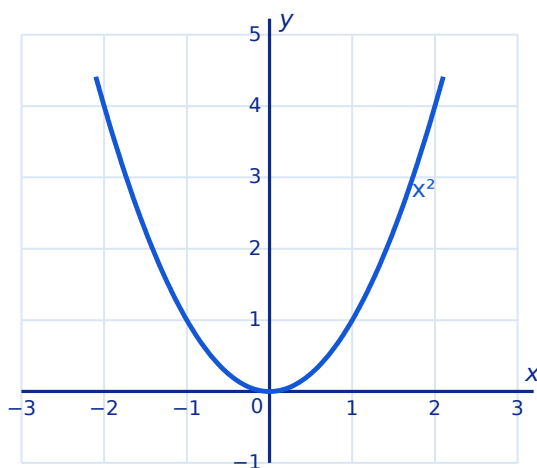
Si $a < 0$, c'est l'inverse : positive avant le zéro, négative après.

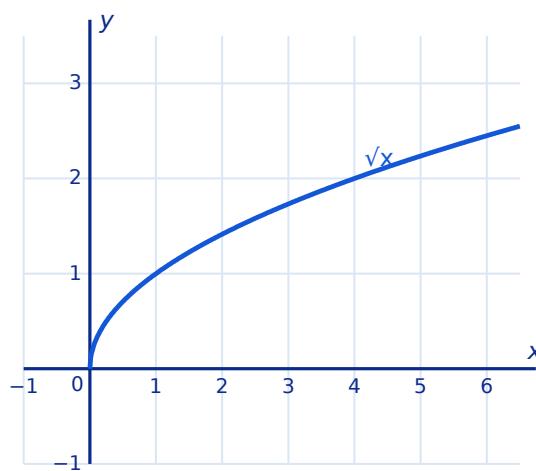
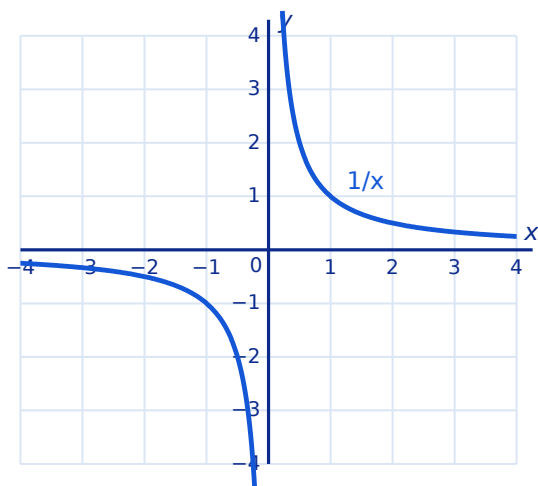
7. Les fonctions de référence

Quatre fonctions reviennent tout le temps, il faut connaître leur courbe et leurs propriétés comme ta poche.

Fonction	Ensemble de définition	Variations	À savoir
Carré : $x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$	décroissante sur $] -\infty ; 0]$, croissante sur $[0 ; +\infty[$	Minimum 0 en $x = 0$; toujours ≥ 0 ; courbe = parabole
Cube : $x \mapsto x^3$	$\mathbb{R}$	croissante sur $\mathbb{R}$	Passes par $(0 ; 0)$; garde le signe de x
Inverse : $x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^* =] -\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$	décroissante sur $] -\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$	Jamais égale à 0 ; courbe = hyperbole
Racine carrée : $x \mapsto \sqrt{x}$	$[0 ; +\infty[$	croissante sur $[0 ; +\infty[$	Toujours ≥ 0 ; $(\sqrt{x})^2 = x$ pour $x \geq 0$

Les quatre courbes :





Comparer des images

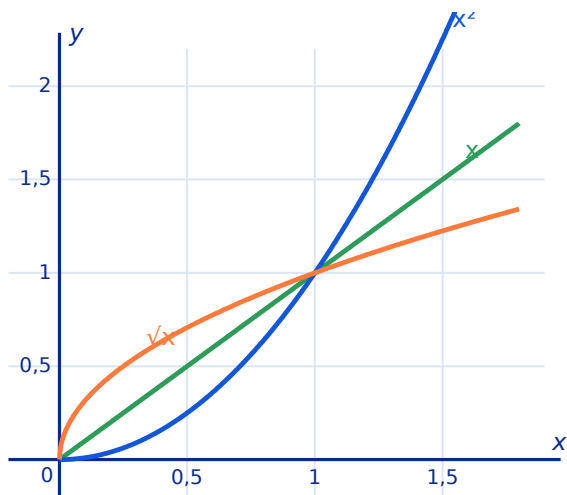
- Fonction carré : deux nombres **positifs** sont rangés dans le même ordre que leurs carrés ; deux nombres **négatifs** sont rangés dans l'ordre contraire.
- Fonction cube et racine carrée : elles **conservent l'ordre** (croissantes).
- Fonction inverse : sur $]0 ; +\infty[$ ou sur $]-\infty ; 0[$, elle **renverse l'ordre**.

Démonstration (l'inverse est décroissante sur $]0 ; +\infty[$). Soient $0 < x_1 < x_2$. Alors $1/x_1 - 1/x_2 = (x_2 - x_1) \div (x_1 x_2) > 0$, car le numérateur et le dénominateur sont positifs. Donc $1/x_1 > 1/x_2$: l'ordre est renversé.

Piège : l'inverse n'est pas décroissante « sur $\mathbb{R}^*$ »

On a $-2 < 3$, et pourtant $1/-2 = -0,5 < 1/3 \approx 0,33$: l'ordre n'est pas renversé ! Il faut rester **d'un même côté** de 0. La fonction inverse est décroissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty ; 0[$ et $]0 ; +\infty[$, mais pas sur leur réunion.

Un dernier tableau pour les **positions relatives** des courbes de x , x^2 , x^3 et $\sqrt{x}$ sur $[0 ; +\infty[$: la courbe de $\sqrt{x}$ est au-dessus de celle de x quand $0 < x < 1$, en dessous quand $x > 1$; la courbe de x^2 est en dessous de celle de x quand $0 < x < 1$, au-dessus quand $x > 1$. Elles se croisent en $x = 0$ et en $x = 1$.



8. Parité d'une fonction

Fonction paire, fonction impaire

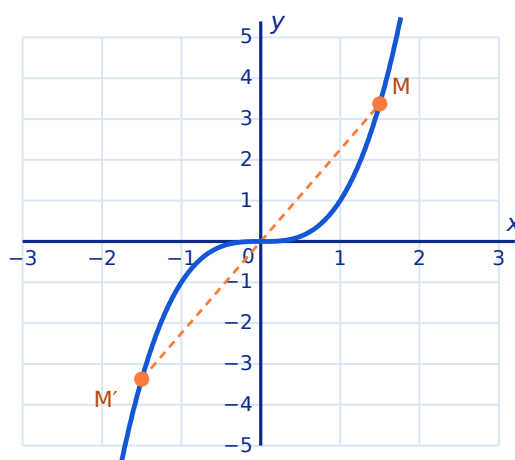
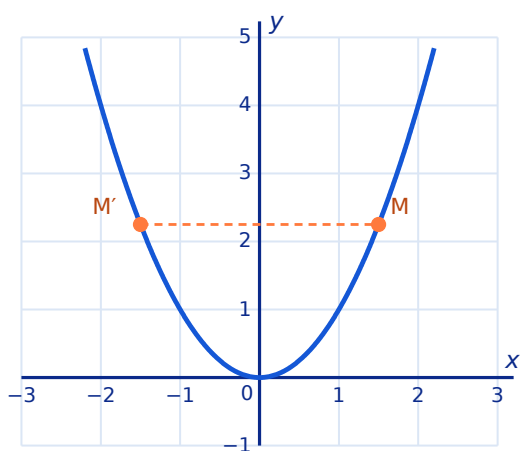
Soit f définie sur un ensemble D **symétrique par rapport à 0** (si $x \in D$ alors $-x \in D$, comme $[-5 ; 5]$ ou $\mathbb{R}$).

- f est **paire** si, pour tout x de D , $f(-x) = f(x)$.
- f est **impaire** si, pour tout x de D , $f(-x) = -f(x)$.

Interprétation graphique

- f est paire $\Leftrightarrow C_f$ est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.
- f est impaire $\Leftrightarrow C_f$ est **symétrique par rapport à l'origine** du repère.

Pourquoi ? Les points $M(x ; f(x))$ et $M'(-x ; f(-x))$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées quand $f(-x) = f(x)$, et par rapport à l'origine quand $f(-x) = -f(x)$.



Méthode : étudier la parité

1. Vérifie que D est symétrique par rapport à 0. Sinon, la fonction n'est ni paire ni

impaire.

2. Calcule $f(-x)$ en remplaçant x par $(-x)$ **avec les parenthèses**.
3. Compare avec $f(x)$ (paire ?) puis avec $-f(x)$ (impaire ?).
4. Pour montrer qu'une fonction n'est **ni paire ni impaire**, donne un contre-exemple : un seul x pour lequel les deux égalités sont fausses.

Trois exemples rédigés

- $f(x) = x^4 - 5x^2$ sur $\mathbb{R}$: $f(-x) = (-x)^4 - 5(-x)^2 = x^4 - 5x^2 = f(x)$. Donc f est **paire**.
- $g(x) = x^3 - 2x$ sur $\mathbb{R}$: $g(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x = -(x^3 - 2x) = -g(x)$. Donc g est **impaire**.
- $h(x) = x^2 + x$ sur $\mathbb{R}$: $h(1) = 2$ et $h(-1) = 0$. On a $h(-1) \neq h(1)$ et $h(-1) \neq -h(1) = -2$. Donc h n'est **ni paire ni impaire**.

Parité des fonctions de référence : le **carré** est pair ; le **cube** et l'**inverse** sont impairs ; la **racine carrée** n'est ni paire ni impaire, car $[0 ; +\infty[$ n'est pas symétrique par rapport à 0 (-4 n'y est pas, alors que 4 y est). Une fonction impaire définie en 0 vérifie toujours $f(0) = 0$.

Mathbot te souffle

« Pour tester une parité, imagine un miroir : vertical sur l'axe des ordonnées pour une fonction paire, et un demi-tour autour de l'origine pour une fonction impaire. Si la courbe retombe sur elle-même, c'est gagné ! »

À retenir

- Une fonction associe à chaque x de son ensemble de définition D_f **un seul** nombre $f(x)$, l'image de x . Un nombre peut avoir zéro, un ou plusieurs antécédents.
- D_f : pas de division par 0, pas de racine carrée d'un nombre négatif.
- Calculer une image : remplacer x . Trouver les antécédents de k : résoudre $f(x) = k$.
- $M(a ; b) \in C_f \Leftrightarrow a \in D_f$ et $b = f(a)$.
- Résoudre graphiquement : $f(x) = k \Leftrightarrow$ droite horizontale ; $f(x) = g(x) \Leftrightarrow$ points communs ; $f(x) > g(x) \Leftrightarrow C_f$ au-dessus de C_g . Les solutions sont des abscisses.
- $f(x) = ax + b$: courbe = droite ; croissante si $a > 0$, décroissante si $a < 0$; $a = (y_B - y_A) \div (x_B - x_A)$.
- Carré : décroissante puis croissante, minimum 0. Cube : croissante sur $\mathbb{R}$. Inverse : décroissante sur $] -\infty ; 0[$ et sur $] 0 ; +\infty[$ (pas sur $\mathbb{R}^*$). Racine : définie sur $[0 ; +\infty[$, croissante.
- Paire : $f(-x) = f(x)$, courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Impaire : $f(-x) = -f(x)$, courbe symétrique par rapport à l'origine. Il faut d'abord un ensemble

de définition symétrique.