

Géométrie plane et espace

Corrigé des exercices - 2de

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Projetés et distances dans un rectangle ★★★

- Dans un rectangle, (AD) est perpendiculaire à (AB) : le projeté de D sur (AB) est A. De même (BC) $\perp$ (AB), donc le projeté de C sur (AB) est B.
- La distance de C à (AB) est $CB = AD = 5$ cm.
- (AB) $\perp$ (BC) en B : le projeté de A sur (BC) est B, donc la distance est $AB = 9$ cm.

2 L'échelle contre le mur ★★★

Le mur et le sol sont perpendiculaires : le triangle formé par l'échelle, le mur et le sol est rectangle, l'échelle étant l'hypoténuse. D'après le théorème de Pythagore, $h^2 = 5^2 - 1,4^2 = 25 - 1,96 = 23,04$, donc $h = \sqrt{23,04} = 4,8$.

Réponse : l'échelle touche le mur à 4,8 m de hauteur.

3 Vrai ou faux ? ★★★

- Vrai.** MHK est rectangle en H donc $MK^2 = MH^2 + HK^2 > MH^2$.
- Vrai.** Si M est sur d, la perpendiculaire à d passant par M coupe d en M.
- Faux.** Dans un triangle ayant un angle obtus, deux hauteurs ont leur pied sur le prolongement d'un côté, donc en dehors du triangle.
- Faux.** Il y a deux droites parallèles à d, une de chaque côté, à 2 cm de d.
- Vrai.** Si H est le pied de la hauteur issue de A, AH est la distance de A à (BC) et B, C sont des points de (BC) ; AH est donc inférieure à AB et à AC (plus courte distance).

4 Cosinus, sinus et tangente ★★★

- Pour l'angle B : l'hypoténuse est [BC], le côté adjacent est [AB], le côté opposé est [AC]. Donc $\cos B = \mathbf{5/13}$, $\sin B = \mathbf{12/13}$, $\tan B = \mathbf{12/5}$.
- $\cos B = \mathbf{5/13}$ donc $\angle B = \cos^{-1}(\mathbf{5/13}) \approx 67,4^\circ$ (on peut contrôler avec $\tan B = 2,4$).

5 Cinq volumes ★★★

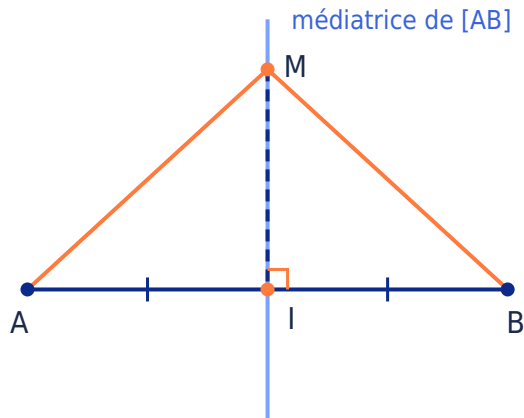
- a. $V = 8 \times 5 \times 3 = 120 \text{ cm}^3$.
- b. $V = \pi \times 3^2 \times 10 = 90\pi \approx 282,7 \text{ cm}^3$.
- c. $V = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 4 = 12\pi \approx 37,7 \text{ cm}^3$.
- d. $V = \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = 36\pi \approx 113,1 \text{ cm}^3$.
- e. L'aire de la base est 36 cm^2 , donc $V = \frac{1}{3} \times 36 \times 5 = 60 \text{ cm}^3$.

6 Agrandissement et réduction ★★★

- a) Les aires sont multipliées par $k^2 = 9$: $12 \times 9 = 108 \text{ cm}^2$. Les volumes sont multipliés par $k^3 = 27$: $5 \times 27 = 135 \text{ cm}^3$.
- b) La hauteur devient $40 \times \frac{1}{2} = 20 \text{ cm}$. Le volume est multiplié par $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$: $3200 \div 8 = 400 \text{ cm}^3$.

7 Un point de la médiatrice ★★★

Soit I le milieu de [AB] : $IA = 5 \text{ cm}$. M est sur la médiatrice, donc $(MI) \perp (AB)$: I est le projeté orthogonal de M sur (AB) et la distance cherchée est MI. Le triangle MIA est rectangle en I, donc $MI^2 = MA^2 - IA^2 = 169 - 25 = 144$, d'où $MI = 12 \text{ cm}$.



8 Hauteur d'un triangle isocèle ★★★

Dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal est aussi la médiatrice de la base : H est le milieu de [BC], donc $BH = 5 \text{ cm}$. Le triangle ABH est rectangle en H : $AH^2 = 13^2 - 5^2 = 144$, donc $AH = 12 \text{ cm}$. Aire = $\frac{1}{2} \times 10 \times 12 = 60 \text{ cm}^2$.

9 Aire d'un trapèze ★★★

Aire = $(9+5)/2 \times 4 = 7 \times 4 = 28 \text{ cm}^2$. Un rectangle de hauteur 4 cm et d'aire 28 cm^2 a pour largeur $28 \div 4 = 7 \text{ cm}$, qui est bien la moyenne de 9 et 5. Oui.

10 Hauteur issue de l'angle droit ★★★

- a. $BC^2 = 81 + 144 = 225$ donc $BC = 15$ cm.
- b. Aire = $\frac{1}{2} \times 9 \times 12 = 54 \text{ cm}^2$. Aussi aire = $\frac{1}{2} \times 15 \times AH$, donc $AH = \frac{108}{15} = 7,2$ cm.
- c. ABH est rectangle en H : $BH^2 = 81 - 51,84 = 29,16$ donc $BH = 5,4$ cm. Alors $HC = 15 - 5,4 = 9,6$ cm (on vérifie : $7,2^2 + 9,6^2 = 51,84 + 92,16 = 144 = AC^2$).

11 Thalès et rapports ★★★

- a. D'après le théorème de Thalès, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$, soit $\frac{4}{10} = \frac{6}{AC} = \frac{MN}{14}$. Donc $AC = 6 \times 10 \div 4 = 15$ cm et $MN = 14 \times 4 \div 10 = 5,6$ cm.
- b. AMN est une réduction de ABC dans le rapport $k = \frac{4}{10} = 0,4$. Le rapport des aires est $k^2 = 0,16$: l'aire de AMN vaut 16 % de celle de ABC.

12 Hauteur d'un mât ★★★

On modélise par un triangle rectangle : sommet de l'angle = les yeux, côté adjacent = 40 m (horizontal), côté opposé = hauteur h au-dessus des yeux. $\tan 35^\circ = \frac{h}{40}$, donc $h = 40 \times \tan 35^\circ \approx 28,0$ m. Il faut ajouter la hauteur des yeux : $28,0 + 1,6 \approx 29,6$ m.

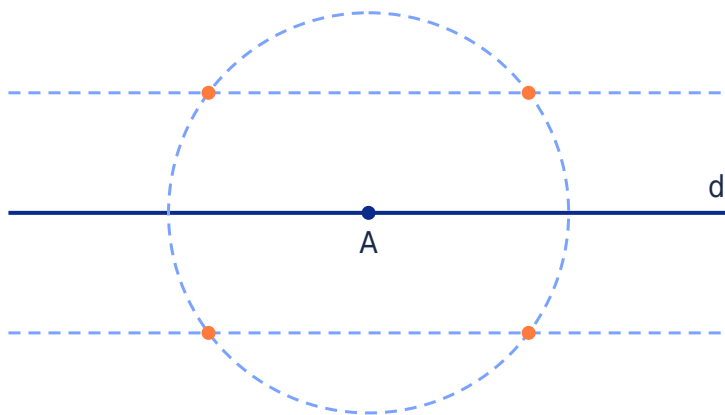
Réponse : le mât mesure environ 29,6 m.

13 Médiane et cercle circonscrit ★★★

- a. $BC^2 = 36 + 64 = 100$ donc $BC = 10$ cm. Dans un triangle rectangle, le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse : O est ce centre et le rayon vaut 5 cm.
- b. Soit I le milieu de [AB]. Comme $OB = OA$, le triangle OAB est isocèle en O, donc (OI) est la médiatrice de [AB] et (OI) $\perp$ (AB) : I est le projeté orthogonal de O sur (AB). Dans le triangle ABC, I et O sont les milieux de [AB] et [BC] : $OI = \frac{AC}{2} = 4$ cm. La distance de O à (AB) est 4 cm (on vérifie : $OI^2 + IB^2 = 16 + 9 = 25 = OB^2$).

14 Points à distances imposées ★★★

- a. Les points à 3 cm de d forment deux droites parallèles à d, de part et d'autre, chacune à 3 cm de d.
- b. Le cercle de centre A et de rayon 5 cm coupe chacune de ces deux droites en deux points, car $3 < 5$: il y a **4 points**. Si H est le projeté de M sur d, AHM est rectangle en H avec $MH = 3$ et $AM = 5$, donc $AH^2 = 25 - 9 = 16$ et $AH = 4$ cm. Les quatre points sont les sommets d'un rectangle de 8 cm sur 6 cm centré en A.



15 Un cône de glace ★★★

Génératrice : $g^2 = 12^2 + 5^2 = 169$ donc $g = 13$ cm. Volume : $\frac{1}{3} \times \pi \times 25 \times 12 = 100\pi \approx 314,2$ cm³. Aire latérale : $\pi \times 5 \times 13 = 65\pi \approx 204,2$ cm².

16 Une pyramide coupée ★★★

- La section est un carré, réduction de la base dans le rapport $k = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$: son côté vaut $12 \times \frac{1}{3} = 4$ cm.
- Petite pyramide : $\frac{1}{3} \times 4^2 \times 3 = 16$ cm³. Grande : $\frac{1}{3} \times 144 \times 9 = 432$ cm³.
Rapport : $16 \div 432 = \frac{1}{27} = (\frac{1}{3})^3$, comme prévu avec k^3 .

17 Diagonales d'un cube ★★★

ABC est rectangle en B : $AC^2 = 36 + 36 = 72$, $AC = 6\sqrt{2} \approx 8,49$ cm. Le triangle ACG est rectangle en C (l'arête (CG) est orthogonale au plan (ABC)) : $AG^2 = 72 + 36 = 108$, $AG = 6\sqrt{3} \approx 10,39$ cm.

Volume de ABCDG : $\frac{1}{3} \times 36 \times 6 = 72$ cm³ ; le cube vaut 216 cm³ = 3×72 . Il faut **3 pyramides**.

18 Section d'une boule ★★★

- $r = \sqrt{(10^2 - 6^2)} = \sqrt{64} = 8$ cm. Aire = $\pi \times 8^2 = 64\pi \approx 201,1$ cm².
- $d = \sqrt{(10^2 - 5^2)} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \approx 8,66$ cm.

19 Un réservoir ★★★

Cylindre : $\pi \times 2^2 \times 5 = 20\pi$ m³. Demi-boule : $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times 2^3 = \frac{16\pi}{3}$ m³. Total : $20\pi + \frac{16\pi}{3} = \frac{76\pi}{3} \approx 79,6$ m³. Comme 1 m³ = $1\,000$ L, le réservoir contient environ **79 600 litres**.

Fiche en ligne : maths-facile.eu/geometrie-plane-et-espace-corrige-exercices-2de/ · Cours, exercices et contrôles

20 Verre conique à moitié plein ★★★

Le liquide occupe un petit cône, réduction du verre dans le rapport $k = \frac{1}{2}$: hauteur 6 cm, rayon 2 cm. Son volume est $\frac{1}{3} \times \pi \times 4 \times 6 = 8\pi \approx 25,1 \text{ cm}^3$. Le verre complet vaut $\frac{1}{3} \times \pi \times 16 \times 12 = 64\pi \text{ cm}^3$. La fraction est $\frac{8}{64} = \frac{1}{8} = (\frac{1}{2})^3$.

Le verre n'est donc rempli qu'au huitième, pas à moitié !

21 Le triangle 13 - 14 - 15 ★★★

- Dans ABH rectangle en H : $AH^2 = 169 - x^2$. Dans AHC rectangle en H, avec $HC = 14 - x$ (H est entre B et C, vérifié ensuite) : $AH^2 = 225 - (14 - x)^2 = 225 - 196 + 28x - x^2 = 29 + 28x - x^2$. Donc $169 = 29 + 28x$, soit $x = 5$. Alors $AH^2 = 169 - 25 = 144$ et $AH = 12 \text{ cm}$. (H est bien dans [BC] car $0 < 5 < 14$.)
- Aire = $\frac{1}{2} \times 14 \times 12 = 84 \text{ cm}^2$. Hauteur issue de B : $\frac{168}{15} = 11,2 \text{ cm}$. Hauteur issue de C : $\frac{168}{13} \approx 12,92 \text{ cm}$.
- $p = \frac{42}{2} = 21 \text{ cm}$ et $r = \frac{84}{21} = 4 \text{ cm}$.

22 Cordes et projeté dans un cercle ★★★

- C est sur le cercle de diamètre [AB], donc ACB est rectangle en C. Avec la démonstration de l'exercice 27, on obtient $CH^2 = AH \times HB$. Ici $HB = 20 - 5 = 15 \text{ cm}$.
- $CH^2 = 5 \times 15 = 75$, donc $CH = 5\sqrt{3} \approx 8,66 \text{ cm}$. Comme (AB) est la médiatrice de [CD] ($CO = DO$ et même projeté H), $CD = 2 CH = 10\sqrt{3} \approx 17,32 \text{ cm}$. Les diagonales [AB] et [CD] sont perpendiculaires : aire = $\frac{1}{2} \times AB \times CD = \frac{1}{2} \times 20 \times 10\sqrt{3} = 100\sqrt{3} \approx 173,2 \text{ cm}^2$.

23 Une tour, deux observations ★★★

Soit T le pied de la tour. Depuis P : $\tan 30^\circ = \frac{h}{PT}$, donc $PT = h \div \tan 30^\circ = h\sqrt{3}$. Depuis Q (50 m plus près) : $\tan 45^\circ = 1 = \frac{h}{QT}$ donc $QT = h$. Comme $PT - QT = 50$: $h\sqrt{3} - h = 50$, soit $h(\sqrt{3} - 1) = 50$. Alors $h = 50 \div (\sqrt{3} - 1) = \frac{50(\sqrt{3}+1)}{2} = 25(\sqrt{3} + 1) \approx 68,30 \text{ m}$.

Vérification : $PT \approx 118,30 \text{ m}$, $QT \approx 68,30 \text{ m}$, différence = 50 m.

24 Un tronc de cône ★★★

Le plan est à $15 - 6 = 9 \text{ cm}$ du sommet : le petit cône est une réduction de rapport $k = \frac{9}{15} = 0,6$. Le rayon de la section est $9 \times 0,6 = 5,4 \text{ cm}$.

Grand cône : $\frac{1}{3} \times \pi \times 81 \times 15 = 405\pi \text{ cm}^3$. Petit cône : $k^3 \times 405\pi = 0,216 \times 405\pi =$

$87,48\pi \text{ cm}^3$. Tronc : $405\pi - 87,48\pi = 317,52\pi \approx 997,5 \text{ cm}^3$.

25 Le plan (BDG) dans un cube ★★★

- [BD], [DG] et [BG] sont des diagonales de faces carrées d'arête 4 : elles mesurent toutes $4\sqrt{2} \text{ cm}$ (Pythagore : $16 + 16 = 32$). BDG est donc équilatéral. Son aire est $\frac{\sqrt{3}}{4} \times (4\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 32 = 8\sqrt{3} \approx 13,86 \text{ cm}^2$.
- La pyramide CBDG a pour base le triangle BCD, rectangle en C avec $CB = CD = 4$ (aire 8 cm^2), et pour hauteur $CG = 4$ puisque $(CG) \perp (ABC)$. Volume = $\frac{1}{3} \times 8 \times 4 = \frac{32}{3} \approx 10,67 \text{ cm}^3$. En prenant BDG comme base : $\frac{1}{3} \times 8\sqrt{3} \times h = \frac{32}{3}$, donc $h = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \approx 2,31 \text{ cm}$: c'est la distance de C au plan (BDG).

26 Une glace à l'italienne ★★★

Cône : $\frac{1}{3} \times \pi \times 9 \times 9 = 27\pi \text{ cm}^3$. Demi-boule : $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times 27 = 18\pi \text{ cm}^3$. Total : $45\pi \approx 141,4 \text{ cm}^3$. Part de la glace : $\frac{18}{45} = 0,4$, soit **40 %**.

27 Démonstration : $AH^2 = BH \times HC$ ★★★

- $AB^2 = AH^2 + BH^2$; $AC^2 = AH^2 + HC^2$; $BC^2 = AB^2 + AC^2$ avec $BC = BH + HC$.
- De la troisième : $(BH + HC)^2 = AH^2 + BH^2 + AH^2 + HC^2$, soit $BH^2 + 2 BH \times HC + HC^2 = 2AH^2 + BH^2 + HC^2$. On simplifie : $2 BH \times HC = 2AH^2$, donc $AH^2 = BH \times HC$. ■
- $AH^2 = 4 \times 9 = 36$ donc $AH = 6 \text{ cm}$. $AB^2 = 36 + 16 = 52$ donc $AB = 2\sqrt{13} \approx 7,21 \text{ cm}$; $AC^2 = 36 + 81 = 117$ donc $AC = 3\sqrt{13} \approx 10,82 \text{ cm}$. $BC = 13$ et $AB^2 + AC^2 = 52 + 117 = 169 = BC^2$, ce qui confirme (réciproque de Pythagore) que ABC est rectangle en A.

28 Un centre loin du milieu ★★★

- (AH) est la hauteur et la médiatrice de [BC] : $AH^2 = 100 - 36 = 64$, $AH = 8 \text{ cm}$. O est équidistant de B et C, donc sur la médiatrice de [BC], qui est (AH).
- Si O est sur [AH] avec $OH = y$, alors $OA = 8 - y$ et $OB^2 = OH^2 + HB^2 = y^2 + 36$. Comme $OA = OB$: $(8 - y)^2 = y^2 + 36$, soit $64 - 16y = 36$, donc $y = 1,75 \text{ cm}$ (on a bien $0 < y < 8$). Le rayon est $OA = 8 - 1,75 = 6,25 \text{ cm}$ (contrôle : $\sqrt{(1,75^2 + 36)} = \sqrt{39,0625} = 6,25$).