

Géométrie plane et espace

Cours de maths - 2de

La géométrie de la 2de réunit tout ce que tu as appris au collège (Pythagore, Thalès, aires, volumes) et le met au service de raisonnements plus précis : distances, lieux de points, trigonométrie, solides coupés par un plan. Dans ce chapitre, on travaille **sans repère** : pas de coordonnées, seulement des figures, des propriétés et des calculs. À la fin, tu sauras justifier proprement une construction, calculer une hauteur, un angle ou un volume, et te repérer dans l'espace.

1. Rappels : configurations et théorèmes du collège

Théorème de Pythagore et sa réciproque

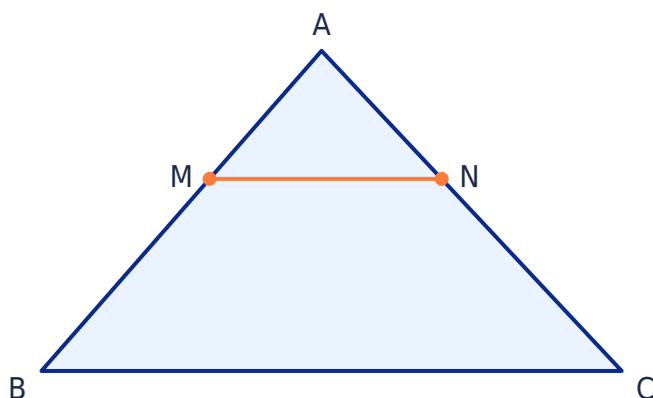
Si ABC est rectangle en B, alors $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Réciproquement, si dans un triangle ABC on a $AC^2 = AB^2 + BC^2$, alors ABC est rectangle en B.

Théorème de Thalès et sa réciproque

Soit ABC un triangle, M un point de (AB) et N un point de (AC). Si $(MN) \parallel (BC)$, alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$. Réciproquement, si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et si les points M, B, A d'une part, N, C, A d'autre part sont alignés dans le même ordre, alors $(MN) \parallel (BC)$.

Exemple

Dans le triangle ABC rectangle en B avec $AB = 9$ cm et $BC = 12$ cm, on a $AC^2 = 81 + 144 = 225$ donc $AC = 15$ cm. Si M est le point de [AB] tel que $AM = 3$ cm et N le point de [AC] tel que $(MN) \parallel (BC)$, alors $\frac{3}{9} = \frac{AN}{15} = \frac{MN}{12}$, d'où $AN = 5$ cm et $MN = 4$ cm.



Pour ne rien oublier

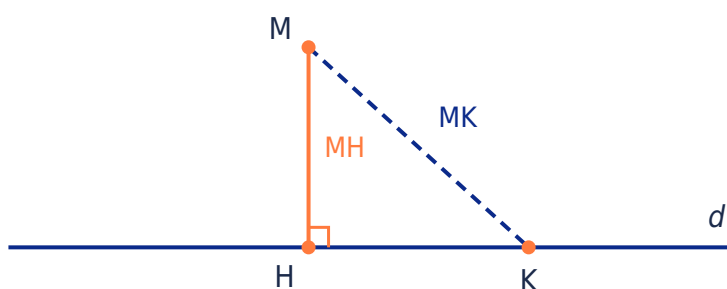
Avant d'écrire « d'après le théorème de... », vérifie toujours les **hypothèses** (angle droit ? droites parallèles ?) et cite-les dans ta rédaction. Un théorème sans ses conditions ne démontre rien.

Rappelle-toi aussi les propriétés de reconnaissance : un quadrilatère est un parallélogramme s'il a ses diagonales de même milieu, ou deux côtés opposés parallèles et de même longueur ; c'est un losange s'il a quatre côtés égaux ; un rectangle s'il a trois angles droits.

2. Projeté orthogonal et distance d'un point à une droite

Projeté orthogonal

Soit d une droite et M un point. Le **projeté orthogonal** de M sur d est le point H de d tel que la droite (MH) soit perpendiculaire à d . Si M est sur d , alors $H = M$.



Distance d'un point à une droite

La distance du point M à la droite d est la longueur MH , où H est le projeté orthogonal de M sur d .

Plus courte distance

Pour tout point K de la droite d , on a $MK \geq MH$, avec égalité seulement si $K = H$. Le projeté orthogonal est donc le point de d **le plus proche** de M .

Démonstration. Prenons K sur d , distinct de H . Le triangle MHK est rectangle en H , donc d'après le théorème de Pythagore $MK^2 = MH^2 + HK^2$. Comme $HK > 0$, on a $MK^2 > MH^2$, et comme ces longueurs sont positives, $MK > MH$. ■

Hauteurs et aires

Dans un triangle ABC, la hauteur issue de A est le segment [AH] où H est le projeté orthogonal de A sur (BC). Son aire vaut $\frac{1}{2} \times BC \times AH$. Dans un parallélogramme, l'aire est le produit d'un côté par la hauteur correspondante.

Piège

Dans un triangle qui a un angle obtus, le pied de la hauteur issue d'un sommet peut tomber **en dehors** du côté opposé, sur son prolongement. C'est pourquoi on parle du projeté sur la *droite* (BC), pas sur le segment [BC].

Points à une distance donnée d'une droite

Soit d une droite et $k > 0$. L'ensemble des points situés à la distance k de d est formé de **deux droites** parallèles à d, situées de part et d'autre de d, chacune à la distance k de d.

Méthode : calculer une hauteur grâce à l'aire

1. Calcule l'aire du triangle avec une base et la hauteur que tu connais.
2. Écris la même aire avec la base dont tu veux la hauteur : $\frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{hauteur}$ inconnue.
3. Résous l'équation.

Exemple : ABC rectangle en A, $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, donc $BC = 10$ cm. L'aire vaut $\frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$ cm². Si H est le projeté de A sur (BC), alors $\frac{1}{2} \times 10 \times AH = 24$, donc $AH = 4,8$ cm.

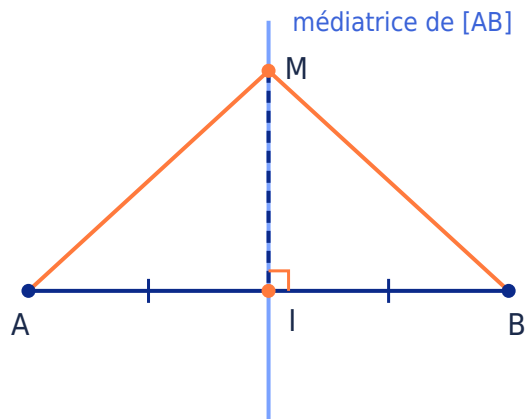
3. Médiatrice, bissectrice et cercles

Médiatrice

La médiatrice d'un segment [AB] est la droite perpendiculaire à (AB) passant par son milieu.

Caractérisation de la médiatrice

Un point M appartient à la médiatrice de [AB] si et seulement si $MA = MB$.



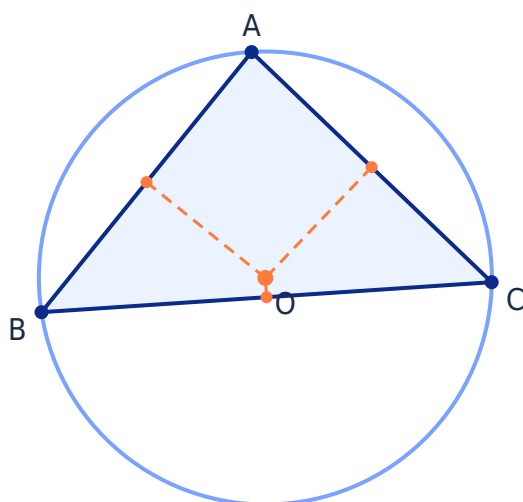
Démonstration (sens direct). Soit I le milieu de [AB] et M un point de la médiatrice, distinct de I. Les triangles MIA et MIB sont rectangles en I, avec $IA = IB$. Par Pythagore, $MA^2 = MI^2 + IA^2 = MI^2 + IB^2 = MB^2$, donc $MA = MB$. Si $M = I$, c'est évident. ■

Bissectrice

La bissectrice d'un angle est la demi-droite issue du sommet qui le partage en deux angles de même mesure. Ses points sont **équidistants des deux côtés** de l'angle.

Cercle circonscrit

Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point O, équidistant des trois sommets. Le cercle de centre O passant par les sommets est le **cercle circonscrit** au triangle.



Triangle rectangle et cercle

Un triangle est rectangle en A si et seulement si A appartient au cercle de diamètre [BC]. Dans un triangle rectangle, le centre du cercle circonscrit est le milieu de

l'hypoténuse, et la médiane issue de l'angle droit vaut la moitié de l'hypoténuse.

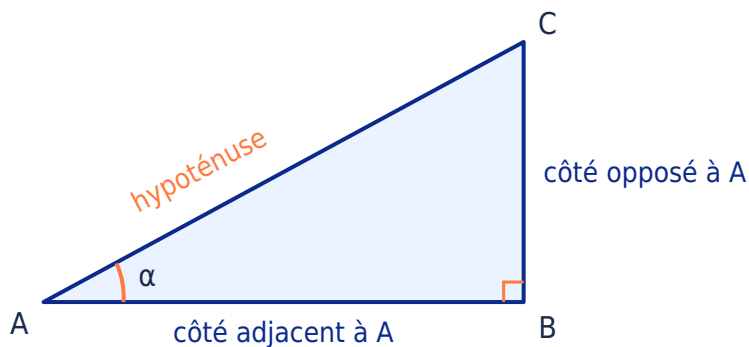
Cercle inscrit et tangente

Les trois bissectrices d'un triangle se coupent en un point équidistant des trois côtés : c'est le centre du **cercle inscrit**. Une droite est **tangente** à un cercle de centre O en un point T si elle est perpendiculaire au rayon [OT] : T est alors le projeté orthogonal de O sur la tangente.

Exemple

[AB] mesure 10 cm. Un point M de sa médiatrice vérifie $MA = 13$ cm. Soit I le milieu de [AB] : $IA = 5$ cm et MIA est rectangle en I, donc $MI^2 = 13^2 - 5^2 = 144$ et $MI = 12$ cm. La distance de M à la droite (AB) est donc 12 cm.

4. Trigonométrie dans le triangle rectangle



Cosinus, sinus, tangente

Dans un triangle rectangle, pour un angle aigu α :

- $\cos \alpha = \text{adjacent/hypoténuse}$
- $\sin \alpha = \text{opposé/hypoténuse}$
- $\tan \alpha = \text{opposé/adjacent}$

Relations

Pour tout angle aigu α : $0 < \cos \alpha < 1$, $0 < \sin \alpha < 1$, $\tan \alpha = \sin \alpha \div \cos \alpha$ et **$(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1$** .

Justification. Avec les notations du dessin, $\cos \alpha = AB/AC$ et $\sin \alpha = BC/AC$. Donc $(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = (AB^2 + BC^2) \div AC^2 = AC^2 \div AC^2 = 1$ d'après Pythagore. De plus $\sin \alpha \div \cos \alpha = BC$

Fiche en ligne : maths-facile.eu/geometrie-plane-et-espace-cours-2de/ · Cours, exercices et contrôles corrigés sur

$$\div AB = \tan \alpha. \blacksquare$$

Valeurs remarquables

Angle α	30°	45°	60°
$\cos \alpha$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
$\sin \alpha$	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
$\tan \alpha$	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$

Méthode : choisir le bon rapport

1. Repère l'angle étudié, l'hypoténuse (face à l'angle droit), le côté opposé et le côté adjacent à cet angle.
2. Choisis le rapport qui contient la donnée connue **et** l'inconnue.
3. Écris l'égalité, résous-la et arrondis à la précision demandée.

Pour trouver un **angle**, on utilise la touche $\cos^{-1}$, $\sin^{-1}$ ou $\tan^{-1}$ de la calculatrice, réglée en degrés.

Exemple

Le triangle ABC est rectangle en B, avec $\angle A = 40^\circ$ et $AC = 8$ cm. Le côté BC est opposé à A et AC est l'hypoténuse : $BC = 8 \times \sin 40^\circ \approx 5,1$ cm. Le côté AB est adjacent : $AB = 8 \times \cos 40^\circ \approx 6,1$ cm. Enfin $\angle C = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$.

Piège

Vérifie le mode de ta calculatrice : « DEG » pour des degrés. En mode « RAD », $\sin 40$ donne un résultat tout à fait différent. Et la trigonométrie ne s'applique que dans un triangle **rectangle**.

La trigonométrie permet aussi de calculer une hauteur : si ABC a un angle B de mesure β et que H est le projeté de A sur (BC), alors $AH = AB \times \sin \beta$.

5. Aires et périmètres usuels

Figure	Aire	Périmètre
Rectangle (L, l)	$L \times l$	$2(L + l)$
Parallélogramme (base b, hauteur h)	$b \times h$	$2(a + b)$ avec a, b les côtés
Triangle (base b, hauteur h)	$\frac{1}{2} \times b \times h$	somme des côtés
Trapeze (bases B et b, hauteur h)	$\frac{(B+b)}{2} \times h$	somme des côtés
Disque de rayon r	πr^2	$2\pi r$

Figure	Aire	Périmètre
Secteur angulaire d'angle α°	$\alpha/360 \times \pi r^2$	$\alpha/360 \times 2\pi r + 2r$

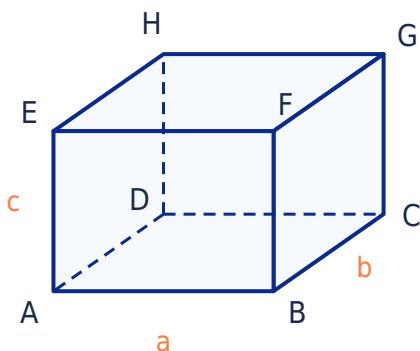
Exemple

Un secteur de disque de rayon 6 cm et d'angle 60° a pour aire $60/360 \times \pi \times 6^2 = 6\pi \approx 18,8 \text{ cm}^2$. Son arc mesure $60/360 \times 2\pi \times 6 = 2\pi \approx 6,3 \text{ cm}$.

Méthode : découper pour calculer

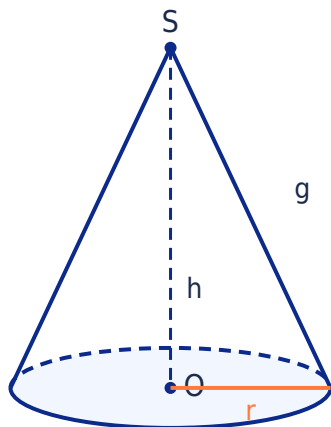
Pour une figure composée, découpe-la en figures usuelles (rectangle, triangle, demi-disque), calcule chaque aire séparément, puis additionne ou soustrais. Garde les valeurs exactes (avec π ou $\sqrt{}$) jusqu'à la dernière ligne, puis arrondis une seule fois.

6. Solides usuels : aires et volumes



Formules à connaître

Solide	Volume	Aire
Pavé droit (a, b, c)	$a \times b \times c$	$2(ab + bc + ac)$
Cube d'arête a	a^3	$6a^2$
Cylindre (rayon r, hauteur h)	$\pi r^2 h$	latérale : $2\pi r h$
Pyramide (aire de base B, hauteur h)	$1/3 \times B \times h$	somme des faces
Cône (rayon r, hauteur h)	$1/3 \times \pi r^2 h$	latérale : $\pi r g$
Boule de rayon R	$4/3 \pi R^3$	sphère : $4\pi R^2$



Génératrice d'un cône

Dans un cône de révolution de hauteur h et de rayon de base r , la génératrice g (longueur d'un segment joignant le sommet à un point du cercle de base) vérifie $g^2 = h^2 + r^2$, car le triangle formé par la hauteur, un rayon et la génératrice est rectangle.

Exemple

Cône de rayon 6 cm et de hauteur 8 cm. Génératrice : $g^2 = 64 + 36 = 100$ donc $g = 10$ cm. Volume : $\frac{1}{3} \times \pi \times 36 \times 8 = 96\pi \approx 301,6 \text{ cm}^3$. Aire latérale : $\pi \times 6 \times 10 = 60\pi \approx 188,5 \text{ cm}^2$.

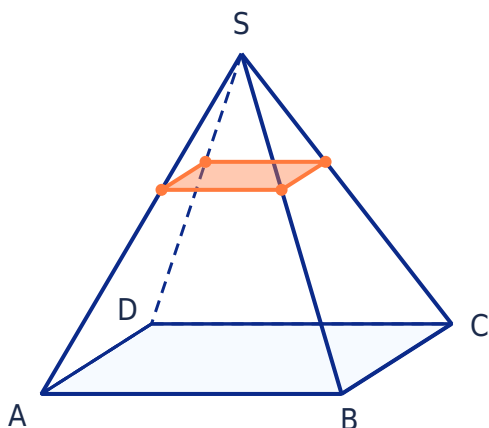
Piège

Le facteur **1/3** des pyramides et des cônes est souvent oublié, et le rayon d'une boule se met **au cube**, pas au carré. Vérifie aussi que tes mesures sont dans la même unité avant de calculer un volume.

7. Sections planes, agrandissement et réduction

Sections par un plan parallèle à une face ou à la base

- Un pavé droit coupé par un plan parallèle à une face : la section est un rectangle identique à cette face.
- Un cylindre coupé par un plan parallèle à sa base : un disque de même rayon ; parallèle à l'axe : un rectangle.
- Une pyramide ou un cône coupé par un plan parallèle à la base : une **réduction** de la base.
- Une boule coupée par un plan : un disque.



Agrandissement et réduction de rapport k

Quand on multiplie toutes les longueurs d'une figure ou d'un solide par $k > 0$:

- les longueurs sont multipliées par k ;
- les aires sont multipliées par k^2 ;
- les volumes sont multipliés par k^3 .

Les angles ne changent pas.

Section d'une pyramide ou d'un cône par un plan parallèle à la base

Si le plan coupe la hauteur à la distance h' du sommet et que la hauteur totale vaut h , la section est une réduction de la base de rapport $k = h'/h$, et le petit solide obtenu (pyramide ou cône) est une réduction du grand de rapport k .

Exemple

Pyramide de hauteur 12 cm dont la base est un carré de côté 9 cm. Un plan parallèle à la base passe à 4 cm du sommet : $k = 4/12 = 1/3$. La section est un carré de côté 3 cm, d'aire 9 cm². Le grand volume est $1/3 \times 81 \times 12 = 324$ cm³ ; le petit vaut $324 \times (1/3)^3 = 12$ cm³, ce que confirme $1/3 \times 9 \times 4 = 12$.

Section d'une boule

Si un plan est à la distance d du centre O d'une boule de rayon R (avec $d < R$), la section est un disque de centre H (projeté orthogonal de O sur le plan) et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$. Si $d = R$, le plan est tangent à la sphère en un seul point.

8. Droites et plans de l'espace

Positions relatives

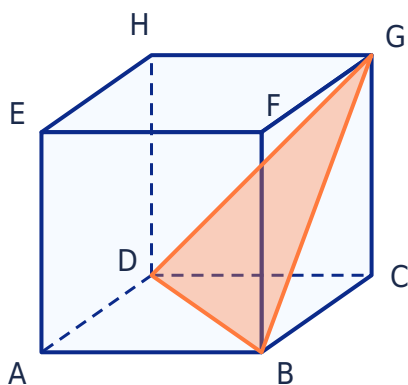
- **Deux droites** de l'espace sont soit coplanaires (parallèles ou sécantes), soit non coplanaires : elles n'ont alors aucun point commun et ne sont pas parallèles.
- **Une droite et un plan** sont sécants en un point, parallèles, ou la droite est contenue dans le plan.
- **Deux plans** sont parallèles (confondus ou sans point commun) ou sécants suivant une droite.

Propriétés de parallélisme et d'orthogonalité

- Si deux plans parallèles sont coupés par un troisième plan, les deux droites d'intersection sont parallèles.
- Si une droite est parallèle à une droite d'un plan, elle est parallèle à ce plan (si elle n'y est pas contenue).
- Une droite est **orthogonale à un plan** si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan ; elle est alors orthogonale à toutes les droites du plan.

Exemple dans un cube ABCDEFGH

Les arêtes (AB) et (CG) ne sont ni parallèles ni sécantes : elles sont non coplanaires. L'arête (CG) est orthogonale au plan (ABC) puisqu'elle est orthogonale à (CB) et à (CD), deux droites sécantes de ce plan. Le plan (BDG) coupe le cube suivant un triangle équilatéral de côté $a\sqrt{2}$ si a est l'arête.



Méthode : tracer la section d'un cube par un plan

1. Place les trois points qui définissent le plan.
2. Relie deux points situés sur une même face : leur segment est une arête de la section.

3. Si deux faces sont parallèles, la section y laisse deux segments **parallèles** (utilise la propriété sur les plans parallèles).
4. Termine en repassant en trait plein les parties visibles et en pointillés les parties cachées.

Mathbot te dit

Dans l'espace, dessine toujours les arêtes cachées en pointillés et nomme tes sommets : une figure claire règle déjà la moitié du problème !

À retenir

- Le **projeté orthogonal** H de M sur d est tel que $(MH) \perp d$; la distance de M à d est MH, la plus courte distance de M à un point de d.
- Aire d'un triangle : $\frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{hauteur}$; une hauteur peut se calculer avec l'aire.
- Un point est sur la **médiatrice** de [AB] si et seulement si $MA = MB$; les trois médiatrices d'un triangle se coupent au centre du cercle circonscrit.
- Dans un triangle rectangle : $\cos = \text{adjacent}/\text{hypoténuse}$, $\sin = \text{opposé}/\text{hypoténuse}$, $\tan = \text{opposé}/\text{adjacent}$; $(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1$.
- Valeurs remarquables : $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$.
- Volumes : pyramide $\frac{1}{3} B h$; cône $\frac{1}{3} \pi r^2 h$; cylindre $\pi r^2 h$; boule $\frac{4}{3} \pi R^3$.
- Rapport k : longueurs $\times k$, aires $\times k^2$, volumes $\times k^3$.
- Une section parallèle à la base d'une pyramide ou d'un cône est une **réduction** de rapport h'/h .
- Dans l'espace, deux plans parallèles coupés par un troisième donnent deux droites parallèles.