

# Grandeurs et mesures

## Cours de maths - 3ème

Dans ce chapitre, tu apprends à **calculer des volumes** (pyramide, cône, boule), l'**aire d'une sphère**, à prévoir ce qui se passe quand on **agrandit ou réduit** un objet, puis à manipuler les **grandeurs composées** : vitesse, débit, masse volumique. À la fin, tu sauras résoudre un problème qui mélange tout cela.

## 1. Rappels : aires, volumes et unités

**Formules déjà connues** Rectangle :  $A = L \times l$  · Triangle :  $A = b \times h \div 2$  · Disque :  $A = \pi \times r^2$  · Prisme droit ou cylindre :  $V = \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$  · Cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $h$  :  $V = \pi \times r^2 \times h$ .

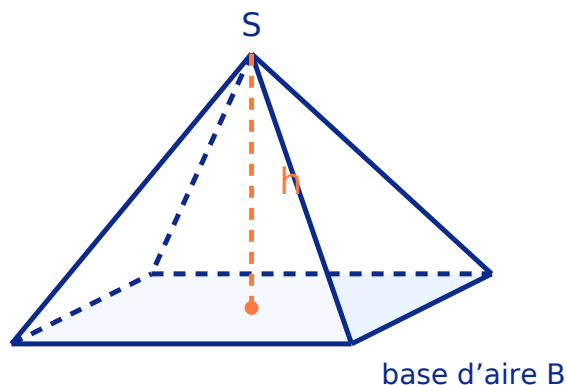
**Convertir les unités** Pour les **longueurs**, on passe d'une unité à la suivante en multipliant ou en divisant par 10. Pour les **aires**, par 100 (car  $1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$ ). Pour les **volumes**, par 1 000 (car  $1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ dm}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3$ ). Et pour les capacités : **1 L = 1 dm<sup>3</sup> = 1 000 cm<sup>3</sup>**, donc  $1 \text{ mL} = 1 \text{ cm}^3$  et  $1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ L}$ .

**Exemple**  $3,2 \text{ m}^2 = 3,2 \times 10\,000 \text{ cm}^2 = 32\,000 \text{ cm}^2$ .  $450 \text{ cm}^3 = 0,45 \text{ dm}^3 = 0,45 \text{ L}$ .  $0,6 \text{ m}^3 = 600 \text{ L}$ .

**Piège** Un coefficient de 10 ne vaut que pour les longueurs. Quand tu convertis une aire, tu changes **deux** dimensions ( $\times 100$ ) ; pour un volume, **trois** ( $\times 1\,000$ ).

## 2. Volume d'une pyramide

**Pyramide** Une pyramide est un solide qui a pour base un polygone (triangle, carré, rectangle...) et dont les faces latérales sont des triangles qui se rejoignent en un point appelé **sommet**. Sa **hauteur** est la distance du sommet au plan de la base, mesurée perpendiculairement.



**Volume d'une pyramide**  $V = \frac{1}{3} \times B \times h$ , où B est l'aire de la base et h la hauteur (dans la même unité de longueur).

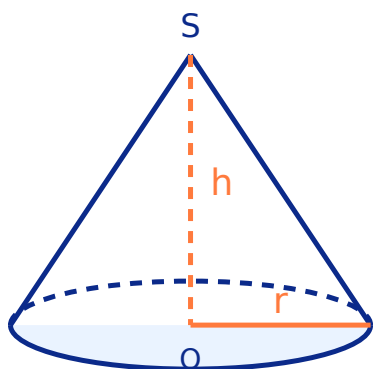
Pourquoi un tiers ? Si tu découpes un cube en trois pyramides identiques ayant pour sommet un même coin du cube, chacune occupe exactement le tiers du cube : une pyramide a le même volume qu'un prisme de même base et même hauteur, divisé par trois.

**Exemple** Pyramide à base carrée de côté 6 cm et de hauteur 10 cm.  $B = 6 \times 6 = 36 \text{ cm}^2$ , donc  $V = \frac{1}{3} \times 36 \times 10 = 120 \text{ cm}^3$ .

**Piège** Ne confonds pas la hauteur de la pyramide (perpendiculaire à la base) avec la hauteur d'une face latérale qui est penchée. Seule la première sert dans la formule.

### 3. Volume d'un cône de révolution

**Cône de révolution** C'est le solide obtenu en faisant tourner un triangle rectangle autour d'un de ses côtés de l'angle droit. Sa base est un disque de rayon r, son sommet est S et sa hauteur  $h = SO$ , où O est le centre du disque.



**Volume d'un cône** Comme pour la pyramide,  $V = \frac{1}{3} \times B \times h$ . Ici la base est un disque, donc  $B = \pi \times r^2$  et  $V = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h$ .

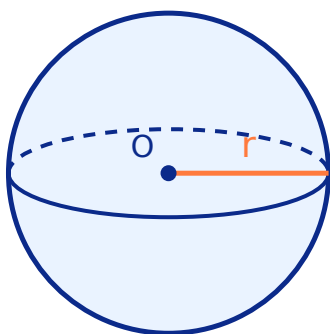
**Exemple** Un cône de rayon 4 cm et de hauteur 9 cm a pour volume  $V = \frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 9$

$9 = 48\pi \text{ cm}^3$  (valeur exacte). À la calculatrice,  $V \approx 150,80 \text{ cm}^3$  (au centième).

**Valeur exacte ou arrondi ?** Quand on te demande une « valeur exacte », garde  $\pi$  dans la réponse ( $48\pi$ ). L'arrondi ne se fait qu'à la fin, à la précision demandée, et on écrit alors  $\approx$ .

## 4. La sphère et la boule

**Sphère et boule** La **sphère** de centre O et de rayon r est la surface formée de tous les points situés à la distance r de O (comme la peau d'une orange). La **boule** est le solide plein qu'elle délimite (l'orange entière).



**Deux formules à connaître** Aire de la sphère :  $A = 4 \times \pi \times r^2$ . Volume de la boule :  $V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$ .

**Exemple** Pour  $r = 3 \text{ cm}$  :  $A = 4 \times \pi \times 3^2 = 36\pi \approx 113,10 \text{ cm}^2$  et  $V = \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = 36\pi \approx 113,10 \text{ cm}^3$ . Les deux nombres sont égaux, mais ils n'ont pas la même unité : on ne peut pas comparer une aire et un volume !

**Piège** Dans le volume, le rayon est au **cube** ( $r^3$ ) ; dans l'aire, au carré. Si on te donne le diamètre, commence par le diviser par 2. Calcule d'abord  $r^3$  puis multiplie par 4 et divise par 3.

**Mathbot** « Mon conseil de robot : fais toujours une estimation avant d'appuyer sur la calculatrice. Une boule de rayon 5 cm tient dans un cube d'arête 10 cm, donc son volume doit être inférieur à  $1\,000 \text{ cm}^3$  ! »

## 5. Agrandissement et réduction

**Agrandir, réduire** Agrandir ou réduire une figure ou un solide de rapport  $k$  ( $k > 0$ ), c'est multiplier toutes ses longueurs par  $k$ , sans changer sa forme. Si  $k > 1$ , c'est un agrandissement ; si  $0 < k < 1$ , c'est une réduction. Une maquette à l'échelle **1/50** est une réduction de rapport  $k = \mathbf{1/50}$ .

**Effet sur les mesures** Lors d'un agrandissement ou d'une réduction de rapport  $k$  :

- les **longueurs** sont multipliées par  $k$  ;
- les **aires** sont multipliées par  $k^2$  ;
- les **volumes** sont multipliés par  $k^3$  ;
- les **angles** ne changent pas.

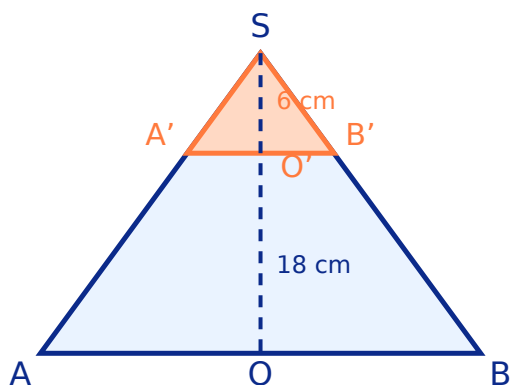
| Rapport $k$ | Longueurs    | Aires         | Volumes        |
|-------------|--------------|---------------|----------------|
| $k = 2$     | $\times 2$   | $\times 4$    | $\times 8$     |
| $k = 3$     | $\times 3$   | $\times 9$    | $\times 27$    |
| $k = 0,5$   | $\times 0,5$ | $\times 0,25$ | $\times 0,125$ |

**Exemple** Une boîte a un volume de  $40 \text{ cm}^3$  et une face de  $18 \text{ cm}^2$ . On l'agrandit avec  $k = 3$  : la face devient  $18 \times 9 = 162 \text{ cm}^2$  et le volume  $40 \times 27 = 1\,080 \text{ cm}^3$ . Si on double les dimensions d'un cube, son volume est multiplié par 8, pas par 2 !

**Retrouver le rapport  $k$**  Si on connaît deux longueurs correspondantes :  $k = \text{longueur finale} \div \text{longueur initiale}$ . Si on connaît le rapport des aires,  $k$  est sa racine carrée. Si on connaît le rapport des volumes,  $k$  est sa racine cubique (exemple : volumes  $\times 27$ , donc  $k = 3$  car  $3^3 = 27$ ).

## 6. Sections par un plan parallèle à la base

**Section d'une pyramide ou d'un cône** Quand on coupe une pyramide ou un cône par un plan **parallèle à la base**, la section a la même forme que la base, en plus petit : c'est une réduction de la base. Le petit solide qui contient le sommet est lui aussi une réduction du grand, de rapport  $k = SO' \div SO$  (distances du sommet aux deux plans).



**Exemple** La pyramide ci-dessus a une base carrée de côté  $12 \text{ cm}$  et une hauteur  $SO = 18 \text{ cm}$ . On la coupe à  $6 \text{ cm}$  du sommet :  $SO' = 6 \text{ cm}$ , donc  $k = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ . Le côté de la section mesure  $12 \times \frac{1}{3} = 4 \text{ cm}$ . Les volumes sont multipliés par  $k^3 = \frac{1}{27}$  : le grand volume vaut  $\frac{1}{3} \times 144 \times 18 = 864 \text{ cm}^3$ , le petit  $864 \div 27 = 32 \text{ cm}^3$ .

**Sphère** La section d'une boule par un plan est toujours un disque. Si le plan est à la distance  $d$  du centre, le rayon  $r'$  du disque vérifie, grâce à Pythagore,  $r'^2 = R^2 - d^2$ .

## 7. Les grandeurs composées : vitesse, débit, masse volumique

**Grandeurs quotients** Une grandeur composée s'obtient en divisant deux grandeurs : la **vitesse moyenne**  $v = d \div t$  (distance parcourue divisée par la durée), le **débit**  $D = V \div t$  (volume écoulé divisé par la durée), la **masse volumique**  $\rho = m \div V$  (masse divisée par le volume : plus elle est grande, plus la matière est dense).

**Trois relations, trois formes**  $d = v \times t$  et  $t = d \div v$  ·  $V = D \times t$  et  $t = V \div D$  ·  $m = \rho \times V$  et  $V = m \div \rho$ .

Le triangle ( $d, v, t$ ) est un bon moyen mnémotechnique : tu caches la grandeur cherchée.

**Le piège des durées** Une durée « 1 h 30 » vaut 1,5 h, pas 1,30 h ! Convertis toujours les minutes en fraction d'heure : 20 min = **1/3** h ; 45 min = 0,75 h ; 6 min = 0,1 h.

**Exemples** Un cycliste parcourt 36 km en 1 h 30 :  $v = 36 \div 1,5 = 24$  km/h. Un robinet débite 9 L/min : pour remplir 45 L il faut  $45 \div 9 = 5$  min. Un bloc de 0,2 m<sup>3</sup> d'un métal de masse volumique 2 700 kg/m<sup>3</sup> a une masse de  $2\,700 \times 0,2 = 540$  kg.

**Vitesse moyenne** Ce n'est pas la moyenne des vitesses ! On divise la distance **totale** par la durée **totale**.

## 8. Convertir une grandeur composée

**Méthode** On convertit l'unité du numérateur et celle du dénominateur séparément, puis on simplifie. Pour passer de km/h à m/s : 1 km = 1 000 m et 1 h = 3 600 s, donc on divise par 3,6 ; pour passer de m/s à km/h, on multiplie par 3,6.

**Exemples** 90 km/h =  $90 \div 3,6 = 25$  m/s. Le débit 2 L/s vaut  $2 \times 60 = 120$  L/min, soit  $120 \times 60 = 7\,200$  L/h. La masse volumique 0,9 g/cm<sup>3</sup> vaut  $0,9 \times 1\,000 = 900$  kg/m<sup>3</sup> (car 1 g/cm<sup>3</sup> = 1 000 kg/m<sup>3</sup>).

## 9. Résoudre un problème de synthèse

**Démarche en 5 étapes** 1) Fais un schéma et repère les solides. 2) Note les données avec leurs unités. 3) Convertis tout dans la même unité avant de calculer. 4) Applique la bonne formule (volume, aire, rapport  $k$ , vitesse, débit...) en écrivant le calcul. 5) Vérifie l'ordre de grandeur et rédige une phrase réponse avec l'unité.

**Exemple** Un cône de rayon 3 dm et de hauteur 5 dm est rempli de sable de masse volumique 1,6 kg/dm<sup>3</sup>. Volume :  $V = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 5 = 15\pi \approx 47,12 \text{ dm}^3$ . Masse :  $47,12 \times 1,6 \approx 75,4 \text{ kg}$ .

## À retenir

- Pyramide et cône :  $V = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}$  ; pour le cône, la base vaut  $\pi \times r^2$ .
- Sphère :  $A = 4 \times \pi \times r^2$ . Boule :  $V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$ .
- Agrandissement ou réduction de rapport  $k$  : longueurs  $\times k$ , aires  $\times k^2$ , volumes  $\times k^3$ .
- Une section parallèle à la base d'une pyramide ou d'un cône est une réduction de la base, de rapport  $k = SO' \div SO$ .
- $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$  ;  $1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ L}$  ; aires :  $\times 100$  par unité, volumes :  $\times 1\,000$  par unité.
- $v = d \div t$  ;  $D = V \div t$  ;  $\rho = m \div V$ . De km/h à m/s, on divise par 3,6.
- Convertis les durées en heures décimales ( $1 \text{ h } 30 = 1,5 \text{ h}$ ) et garde  $\pi$  dans les valeurs exactes.