

Grandeurs et mesures

Cours de maths - 4ème

Peindre un mur, remplir une piscine, calculer la durée d'un trajet : en 4ème, tu apprends à **mesurer et à calculer avec des grandeurs**. Au programme : les aires du parallélogramme, du triangle et du disque, le volume d'un prisme droit et d'un cylindre, les conversions d'unités, puis les grandeurs quotients (vitesse, débit). Une méthode claire accompagne chaque partie.

1. Rappels : périmètre et aire

Périmètre et aire Le **périmètre** d'une figure est la longueur de son contour ; il s'exprime en unités de longueur (cm, m, km...). L'**aire** mesure la surface qu'elle occupe ; elle s'exprime en unités d'aire (cm², m², ...).

Formules déjà connues Rectangle de longueur L et de largeur l : périmètre = $2 \times (L + l)$; aire = $L \times l$.

Carré de côté c : périmètre = $4 \times c$; aire = $c \times c = c^2$.

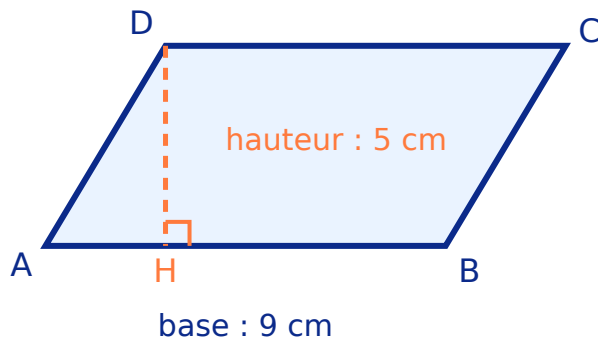
Cercle de rayon r (diamètre d = $2 \times r$) : périmètre = $2 \times \pi \times r = \pi \times d$; aire du disque = $\pi \times r \times r = \pi \times r^2$.

Exemple Un terrain rectangulaire de 30 m sur 12 m a pour périmètre $2 \times (30 + 12) = 84$ m et pour aire $30 \times 12 = 360$ m².

Piège Un périmètre se mesure en m, une aire en m². Si tu écris « aire = 360 m », ton résultat est faux, même si le nombre est bon !

2. Aire d'un parallélogramme

Base et hauteur Dans un parallélogramme, on choisit un côté comme **base**. La **hauteur** associée est le segment perpendiculaire à la base (ou à son prolongement) qui relie la base au côté opposé. Attention : la hauteur n'est pas un côté oblique du parallélogramme.



Ici, la base mesure 9 cm et la hauteur correspondante 5 cm.

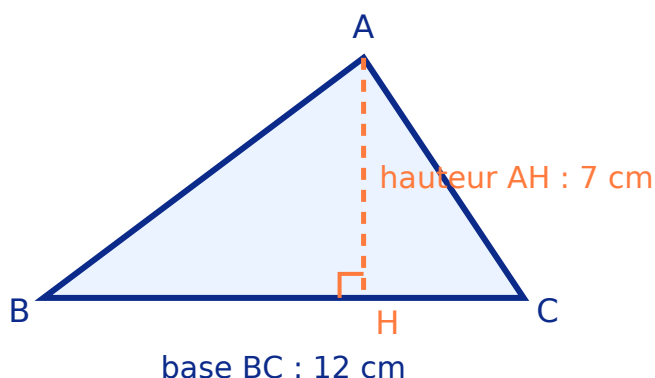
Aire d'un parallélogramme Aire = base $\times$ hauteur. Pour un parallélogramme de base b et de hauteur h : **$A = b \times h$** .

Pourquoi ? On découpe le petit triangle rectangle qui dépasse à gauche et on le recolte à droite : le parallélogramme devient un rectangle de longueur b et de largeur h . Les deux figures ont donc la même aire. Pour $b = 9$ cm et $h = 5$ cm : $A = 9 \times 5 = \mathbf{45 \text{ cm}^2}$.

Astuce Un parallélogramme possède deux bases possibles (deux couples base-hauteur). Les deux produits donnent la même aire. Si tu connais l'aire et une base, tu retrouves la hauteur : $h = A \div b$.

3. Aire d'un triangle

Hauteur d'un triangle La hauteur issue d'un sommet est la droite qui passe par ce sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé (la base). Dans un triangle obtus, elle peut tomber à l'extérieur du triangle.



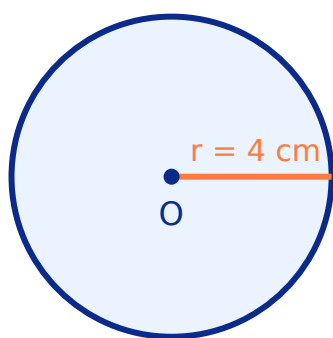
Aire d'un triangle **$A = b \times h \div 2$** (base fois hauteur, divisé par 2) ; autrement dit, l'aire du triangle est la moitié de celle d'un parallélogramme de même base et de même hauteur.

Justification Deux triangles identiques, assemblés (on en retourne un), forment un parallélogramme de base b et de hauteur h , d'aire $b \times h$. Un seul triangle a donc pour aire $(b \times h) \div 2$.

Exemple Pour la base $BC = 12 \text{ cm}$ et la hauteur $AH = 7 \text{ cm}$: $A = 12 \times 7 \div 2 = 84 \div 2 = 42 \text{ cm}^2$.

Pièges 1) N'oublie pas de diviser par 2. 2) La base et la hauteur doivent se correspondre : on ne multiplie pas un côté par une hauteur qui part d'un autre côté. 3) Dans un triangle rectangle, les deux côtés de l'angle droit sont une base et sa hauteur.

4. Aire et périmètre d'un disque ; figures composées



Disque de rayon r Périmètre du cercle : $2 \times \pi \times r$. Aire du disque : $\pi \times r^2$. Le nombre π vaut environ 3,14 (valeur à la calculatrice : 3,141 59...). On garde souvent la valeur exacte (exemple : $16\pi \text{ cm}^2$) avant d'arrondir.

Exemple Pour $r = 4 \text{ cm}$: périmètre = $2 \times \pi \times 4 = 8\pi \approx 25,1 \text{ cm}$; aire = $\pi \times 4^2 = 16\pi \approx 50,3 \text{ cm}^2$.

Rayon ou diamètre ? Si l'énoncé donne le diamètre, tu divises par 2 avant d'utiliser $\pi \times r^2$. Autre erreur fréquente : si le rayon double, l'aire n'est pas doublée mais **multipliée par 4** (puisque r^2 devient $4 r^2$).

Aire d'une figure composée On découpe la figure en morceaux connus (rectangles, triangles, disques ou demi-disques) puis on **additionne** leurs aires ; ou bien on enlève une partie à une grande figure (on **soustrait**). Exemple d'une pelouse carrée de 10 m de côté avec un bassin rond de rayon 2 m : aire de pelouse = $10 \times 10 - \pi \times 2^2 = 100 - 4\pi \approx 87,4 \text{ m}^2$.



Un rectangle prolongé par un demi-disque : on additionne l'aire du rectangle et la moitié de l'aire du disque.

5. Conversions d'unités

Longueurs Chaque unité de longueur vaut 10 fois la suivante : $1 \text{ km} = 1\,000 \text{ m}$; $1 \text{ m} = 10 \text{ dm} = 100 \text{ cm} = 1\,000 \text{ mm}$. On utilise un tableau avec un seul chiffre par colonne.

Aires Une unité d'aire vaut **100** fois la suivante (car on multiplie deux longueurs, 10×10) : $1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$. Dans le tableau, chaque unité occupe **deux colonnes**. À savoir : $1 \text{ ha (hectare)} = 1 \text{ hm}^2 = 10\,000 \text{ m}^2$.

Exemple : $25 \text{ m}^2 = 2\,500 \text{ dm}^2 = 250\,000 \text{ cm}^2 = 0,25 \text{ dam}^2$.

Volumes Une unité de volume vaut **1 000** fois la suivante ($10 \times 10 \times 10$) : $1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ dm}^3$; $1 \text{ dm}^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$. Chaque unité occupe **trois colonnes**.

m^3	$\text{dm}^3 (= 1 \text{ L})$	$\text{cm}^3 (= 1 \text{ mL})$
1	1 000	1 000 000
0,001	1	1 000
0,000 001	0,001	1

Capacités $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$; $1 \text{ mL} = 1 \text{ cm}^3$; $1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ L}$. De plus $1 \text{ L} = 10 \text{ dL} = 100 \text{ cL} = 1\,000 \text{ mL}$.

hL	daL	L	dL	cL	mL
		2	5		
		0	2	5	0

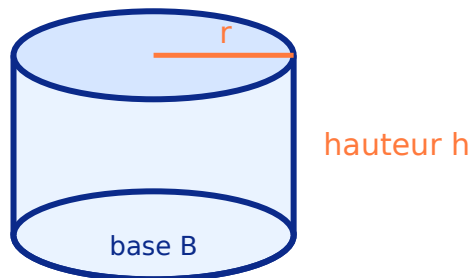
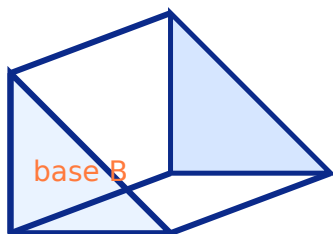
Le nombre $2,5 \text{ L} = 25 \text{ dL} = 250 \text{ cL}$; et $0,25 \text{ L}$ s'écrit $0,25 = 25 \text{ cL} = 250 \text{ mL}$.

Exemples $3,6 \text{ m}^2 = 360 \text{ dm}^2 = 36\,000 \text{ cm}^2$ · $5\,400 \text{ cm}^2 = 54 \text{ dm}^2$ · $0,8 \text{ m}^3 = 800 \text{ dm}^3 = 800 \text{ L}$ · $12\,500 \text{ mL} = 12,5 \text{ L}$.

Astuce Mathbot Salut ! Pour ne pas te tromper de facteur : 1 pour les longueurs, 2 pour les aires, 3 pour les volumes. L'exposant de l'unité (m, m², m³) te donne le nombre de colonnes par unité.

6. Volume d'un prisme droit et d'un cylindre

Prisme droit et cylindre de révolution Un **prisme droit** a deux bases identiques et parallèles (des polygones) reliées par des faces rectangulaires ; sa **hauteur** est la longueur des arêtes qui relient les deux bases. Un **cylindre de révolution** a deux bases qui sont des disques de même rayon, reliées par une surface courbe ; sa hauteur est la distance entre les deux bases. Le pavé droit est un prisme droit dont la base est un rectangle.



Volume Pour un prisme droit ou un cylindre de révolution, avec **B** l'aire d'une base et **h** la hauteur : **$V = B \times h$** .

Pavé droit : $V = L \times l \times h$. Cylindre : $V = \pi \times r^2 \times h$.

Méthode 1) Je repère la base et je calcule son aire B. 2) Je mets toutes les longueurs dans la même unité. 3) Je calcule $V = B \times h$. 4) Je donne l'unité : cm³, dm³, m³... puis je convertis en litres si on le demande.

Exemple 1 : prisme droit La base est un triangle rectangle de côtés de l'angle droit 6 cm et 5 cm : $B = 6 \times 5 \div 2 = 15 \text{ cm}^2$. La hauteur du prisme est 12 cm. $V = 15 \times 12 = 180 \text{ cm}^3$.

Exemple 2 : cylindre Une boîte de rayon 3 cm et de hauteur 10 cm : $V = \pi \times 3^2 \times 10$

$$= 90\pi \approx \mathbf{282,7 \text{ cm}^3} \approx 0,28 \text{ L.}$$

Piège Ne confonds pas la hauteur du prisme (entre les deux bases) avec la hauteur du triangle qui sert de base : ce sont deux longueurs différentes !

7. Grandeurs quotients : la vitesse

Vitesse moyenne La vitesse moyenne est le quotient de la distance parcourue par la durée du trajet : $v = d \div t$. On en déduit $d = v \times t$ et $t = d \div v$. Les unités s'écrivent avec « par » : km/h, m/s.

Méthode 1) Mets la durée dans l'unité voulue (heures si la vitesse est en km/h). 2) Choisis la bonne formule. 3) Écris l'unité.

Durées : 1 h = 60 min = 3 600 s. 1 h 30 min = 1,5 h ; 20 min = $\mathbf{20/60 \text{ h} = 1/3 \text{ h}}$; 45 min = 0,75 h.

Exemple Un cycliste parcourt 36 km en 1 h 30 min, soit 1,5 h. $v = 36 \div 1,5 = \mathbf{24 \text{ km/h}}$. À cette vitesse, en 2 h 30 min (2,5 h), il fait $24 \times 2,5 = \mathbf{60 \text{ km}}$.

km/h et m/s 1 m/s = 3,6 km/h. Pour passer de m/s à km/h : $\times 3,6$. De km/h à m/s : $\div 3,6$. Exemple : 20 m/s = 72 km/h ; 54 km/h = 15 m/s.

Piège classique 1 h 30 min ne s'écrit pas 1,30 h ! Convertis les minutes en fraction d'heure : 30 min = 0,5 h. Et une vitesse moyenne sur deux parties n'est pas la moyenne des deux vitesses : on calcule toujours distance totale $\div$ durée totale.

8. Débit et autres grandeurs produits ou quotients

Débit Le débit est le quotient d'un volume par une durée : $D = V \div t$, par exemple en L/min, m³/h, L/s. On en déduit $V = D \times t$ et $t = V \div D$.

Exemple Un robinet débite 8 L par minute. Pour remplir un bidon de 20 L : $t = 20 \div 8 = 2,5 \text{ min}$, soit 2 min 30 s. En 1 h (60 min), il débite $8 \times 60 = 480 \text{ L}$.

D'autres grandeurs **Grandeurs quotients** : consommation d'une voiture (L pour 100 km), masse volumique (g/cm³), densité de population (habitants/km²), prix au kilo (€/kg).

Grandeurs produits : énergie en kilowattheures (kWh) = puissance (kW) $\times$ durée (h) ; surface = longueur $\times$ largeur (m $\times$ m = m²).

Exemple Un radiateur de 2 kW fonctionne 3 h : il consomme $2 \times 3 = 6 \text{ kWh}$. Si le kWh coûte 0,20 €, la dépense est $6 \times 0,20 = 1,20 \text{ €}$.

Astuce Pour les problèmes mêlant volume et débit, convertis le volume en litres ($1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$), puis divise par le débit. Vérifie toujours que les unités de temps sont les mêmes.

À retenir

- Parallélogramme : $A = b \times h$; triangle : $A = b \times h \div 2$; disque : $A = \pi \times r^2$ et périmètre $2 \times \pi \times r$.
- La hauteur est toujours perpendiculaire à la base choisie.
- Aires : $1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$; $1 \text{ ha} = 10\,000 \text{ m}^2$. Volumes : $1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ dm}^3$; $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$.
- Prisme droit et cylindre : $V = B \times h$ (cylindre : $V = \pi \times r^2 \times h$).
- Vitesse : $v = d \div t$; $1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/h}$; $1 \text{ h } 30 \text{ min} = 1,5 \text{ h}$.
- Débit : $D = V \div t$; énergie : $\text{kWh} = \text{kW} \times \text{h}$.
- Toujours écrire l'unité, et convertir avant de calculer.