

Initiation à l'algèbre

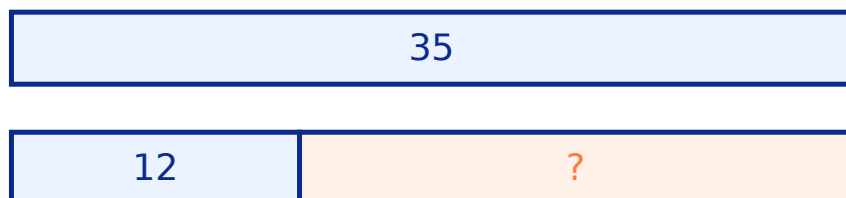
Cours de maths - 6ème

L'algèbre, c'est l'art de **calculer avec un nombre qu'on ne connaît pas encore**. Dans ce chapitre, tu apprends à traduire un problème par un schéma, à suivre un programme de calcul, à utiliser une lettre pour désigner un nombre, puis à trouver ce nombre en résolvant de petites équations. Tu vas voir que c'est comme une enquête : on part d'indices et on retrouve le nombre mystère.

1. Du problème au schéma en barres

Schéma en barres Un schéma en barres représente chaque quantité par une barre dont la longueur est proportionnelle à sa valeur. Une grande barre représente le **tout** ; les barres placées en dessous représentent les **parties**. Le nombre que l'on cherche est marqué d'un point d'interrogation.

Exemple Un sac contient 35 billes. Il y a 12 billes rouges et les autres sont bleues. Combien y a-t-il de billes bleues ?



Le tout (35) est la somme des deux parties : $12 + ? = 35$.

On écrit l'égalité à trou $12 + ? = 35$, puis on cherche la partie manquante : $35 - 12 = 23$. Il y a **23 billes bleues**.

Quelle opération choisir ?

- On cherche le **tout** : on additionne les parties (ou on multiplie si les parties sont égales).
- On cherche une **partie** : on soustrait l'autre partie au tout.
- Les parties sont égales et on cherche leur valeur : on **divise** le tout par le nombre de parties.

2. Les programmes de calcul

Programme de calcul Un programme de calcul est une liste d'instructions à suivre dans l'ordre, en partant d'un **nombre de départ**. À la fin, on obtient un **résultat**.

Exemple Programme : « Choisis un nombre. Multiplie-le par 3. Ajoute 5. »

Départ 4 : $4 \times 3 = 12$, puis $12 + 5 = 17$.

Départ 10 : $10 \times 3 = 30$, puis $30 + 5 = 35$.

Nombre de départ	$\times 3$	+ 5 (résultat)
4	12	17
10	30	35
6	18	23

Remonter un programme Si on connaît le résultat et qu'on cherche le départ, on fait le chemin **à l'envers** avec les opérations contraires : le contraire de « + » est « - », celui de « $\times$ » est « $\div$ ».

Le programme ci-dessus donne 41. Départ ? $41 - 5 = 36$, puis $36 \div 3 = 12$. Vérification : $12 \times 3 + 5 = 41$.

L'ordre compte ! « Ajoute 5 puis multiplie par 3 » n'est pas le même programme que « multiplie par 3 puis ajoute 5 ». Avec 4 au départ, on trouve 27 dans le premier cas et 17 dans le second.

3. Désigner un nombre par une lettre

Expression littérale Une lettre peut représenter un nombre qui change ou que l'on ne connaît pas encore. Une **expression littérale** est un calcul dans lequel apparaît au moins une lettre.

Au lieu de refaire le programme pour chaque départ, on appelle le nombre de départ **n**. Le programme « multiplie par 3 puis ajoute 5 » devient l'expression **$3 \times n + 5$** . Elle sert pour tous les départs possibles.

Quelques traductions utiles

- le double de n : $2 \times n$
- n augmenté de 9 : $n + 9$
- n diminué de 4 : $n - 4$
- le tiers de n : $n \div 3$
- le périmètre d'un carré de côté c : $4 \times c$

Raccourci d'écriture Entre un nombre et une lettre, on peut ne pas écrire le signe $\times$. Ainsi $3 \times n$ s'écrit aussi **$3n$** , et $4 \times c$ s'écrit **$4c$** . Cela signifie « 3 fois n », jamais « 3 puis

Les lettres ne sont pas obligatoirement n : on peut choisir x, a, c... L'important est de dire ce qu'elle représente.

4. Calculer la valeur d'une expression

Remplacer la lettre par un nombre 1) On réécrit l'expression en remplaçant la lettre par le nombre, en remettant le signe $\times$. 2) On calcule en respectant les priorités : multiplications et divisions avant additions et soustractions.

Exemple : $3 \times n + 5$ Pour $n = 4$: $3 \times 4 + 5 = 12 + 5 = 17$.

Pour $n = 0$: $3 \times 0 + 5 = 0 + 5 = 5$.

Pour $n = 2,5$: $3 \times 2,5 + 5 = 7,5 + 5 = 12,5$.

Piège avec $3n$ Si $n = 4$, alors $3n$ vaut $3 \times 4 = 12$ et non 34. Le signe $\times$ caché ne doit pas être oublié.

5. Égalités, égalités à trous et équations

Égalité Une égalité comporte deux membres séparés par le signe $=$. Elle est **vraie** si les deux membres ont la même valeur, **fausse** sinon. Par exemple, $6 \times 4 = 20 + 4$ est vraie ($24 = 24$) mais $15 - 7 = 9$ est fausse ($8 \neq 9$).

Dans une égalité à trou, on remplace le trou par une lettre : on obtient une **équation**.

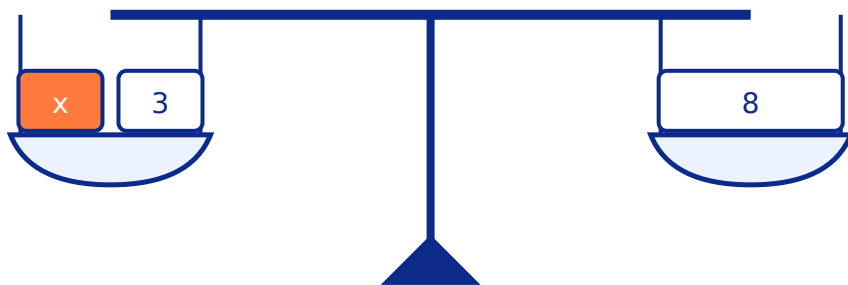
Équation et solution Une **équation** est une égalité contenant une lettre appelée l'**inconnue**. Une **solution** est un nombre qui, mis à la place de l'inconnue, rend l'égalité vraie.

Exemple : 7 est solution de $x + 8 = 15$ car $7 + 8 = 15$.

Tester une valeur Pour savoir si un nombre est solution, remplace l'inconnue par ce nombre dans chaque membre et compare. Pour $x + 8 = 15$: avec 6, on obtient $14 \neq 15$, donc 6 n'est pas solution.

6. Résoudre une équation simple

Une balance en équilibre aide à comprendre : si on enlève la même masse des deux côtés, elle reste en équilibre. Ici, un sachet de x kg et une masse de 3 kg équilibrent 8 kg.



$x + 3 = 8$: on retire 3 kg à chaque plateau, il reste $x = 5$ kg.

Les quatre équations de base

- $x + a = b : x = b - a$
- $x - a = b : x = b + a$
- $a \times x = b : x = b \div a$ (avec a différent de 0)
- $x \div a = b : x = b \times a$

Résoudre pas à pas 1) Repère l'opération qui touche l'inconnue. 2) Fais l'opération contraire avec l'autre nombre. 3) Écris la solution. 4) Vérifie en remplaçant x dans l'équation de départ.

Exemples $x + 14 = 52 : x = 52 - 14 = 38$.

$x - 9 = 20 : x = 20 + 9 = 29$.

$6 \times x = 42 : x = 42 \div 6 = 7$.

$x \div 4 = 8 : x = 8 \times 4 = 32$.

7. Mettre un problème en équation

Les quatre étapes 1) **Choisir** l'inconnue et dire ce qu'elle représente. 2) **Écrire** l'équation qui traduit l'énoncé. 3) **Résoudre** l'équation. 4) **Conclure** par une phrase avec l'unité.

Exemple Inès dépense 18 € au marché. Il lui reste 27 €. Quelle somme avait-elle au départ ?

Soit x la somme de départ, en euros. L'équation est $x - 18 = 27$. Donc $x = 27 + 18 = 45$. **Inès avait 45 € au départ.**

Exemple à deux étapes Jade range 31 photos : 7 photos sont libres et le reste est réparti dans 4 pochettes identiques. Combien y a-t-il de photos par pochette ?

Soit p le nombre de photos par pochette : $4 \times p + 7 = 31$. On retire 7 : $4 \times p = 24$, donc $p = 24 \div 4 = 6$. **Il y a 6 photos par pochette.**

8. Suites de motifs et formules

Avec des allumettes, on construit une chaîne de carrés. Il faut 4 allumettes pour le premier carré, puis 3 de plus pour chaque carré ajouté.



Rang 3 : trois carrés collés, soit $4 + 3 + 3 = 10$ allumettes.

Rang (nombre de carrés)	1	2	3	4
Allumettes	4	7	10	13

Trouver la formule À chaque rang on ajoute 3 allumettes, en partant d'une allumette de « départ » qui ferme le premier carré. Au rang n , le nombre d'allumettes est $3 \times n + 1$. Pour 100 carrés : $3 \times 100 + 1 = 301$ allumettes.

Mathbot te conseille Pour trouver une formule, teste-la sur les premiers rangs du tableau. Si elle marche à chaque fois, tu peux lui faire confiance !

À retenir

- Un schéma en barres aide à choisir l'opération : tout = somme des parties.
- Un programme de calcul se suit dans l'ordre ; pour remonter, on utilise les opérations contraires.
- Une lettre désigne un nombre ; $3n$ veut dire $3 \times n$.
- Pour calculer une expression, on remplace la lettre par le nombre et on respecte les priorités.
- Une solution d'une équation est un nombre qui rend l'égalité vraie.
- $x + a = b : x = b - a$; $x - a = b : x = b + a$; $a \times x = b : x = b \div a$; $x \div a = b : x = b \times a$.
- Pour un problème : choisir l'inconnue, écrire l'équation, résoudre, conclure avec l'unité.