

Intervalles, inégalités et inéquations

Corrigé des exercices - 2de

Corrigé détaillé des exercices du chapitre. Vérifie tes réponses étape par étape et corrige-toi.

1 Inégalité vers intervalle ★★★

- a. $]2 ; 9]$ (2 exclu, 9 inclus).
- b. $[-4 ; +\infty[$ (-4 inclus ; crochet ouvert en $+\infty$).
- c. $] -\infty ; 7[$.
- d. $[-1 ; 3[$.
- e. $]0 ; +\infty[$.
- f. $5 \geq x$ se lit $x \leq 5 :]-\infty ; 5]$.

2 Intervalle vers inégalité ★★★

- a. $3 \leq x \leq 8$.
- b. $-2 < x < 5$.
- c. $x \geq 0$.
- d. $x \leq -6$.
- e. $-5 \leq x < -1$.

3 Appartient ou non ? ★★★

- a. $-3 \in I$: la borne -3 est incluse.
- b. $2 \notin I$: la borne 2 est exclue.
- c. $1,99 \in I$ car $-3 \leq 1,99 < 2$.
- d. $-3,01 \notin I$ car $-3,01 < -3$.
- e. $\sqrt{5} \approx 2,236 > 2$, donc $\sqrt{5} \notin I$.
- f. $-\sqrt{2} \approx -1,414$, et $-3 \leq -1,414 < 2 : -\sqrt{2} \in I$.

4 Entiers d'un intervalle ★★★

- a. $-2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3$ (six entiers, bornes incluses).
- b. $2 ; 3 ; 4 ; 5$ (6 est exclu, 1,5 n'est pas entier et $2 > 1,5$).
- c. $-3 ; -2 ; -1 ; 0$ (-4 est exclu, 0 est inclus).
- d. $3 ; 4 ; 5$ ($2 < 2,1$ donc 2 n'en fait pas partie ; $6 > 5,9$).

5 Amplitude ★★★

- a. $5 - (-3) = 8$.
- b. $7,1 - 2,5 = 4,6$.
- c. $-4,5 - (-10) = -4,5 + 10 = 5,5$.

L'amplitude ne dépend pas du fait que les bornes soient incluses ou non.

6 Représenter sur la droite ★★★

On place un point plein en -2 (inclus) et un point creux en 3 (exclu), avec un trait épais entre les deux. Pour $]1 ; +\infty[$, point creux en 1 et trait vers la droite.

(Voir la droite graduée sur la page en ligne.)

7 Valeurs absolues ★★★

- a. $|-7| = 7$.
- b. $|5,2| = 5,2$.
- c. $|4 - 9| = |-5| = 5$.
- d. $|-2| + |-3| = 2 + 3 = 5$.
- e. $|-2 - 3| = |-5| = 5$. (Ici le résultat coïncide avec le précédent, mais en général $|a + b| \neq |a| + |b|$.)
- f. $\pi \approx 3,14 < 4$, donc $\pi - 4$ est négatif : $|\pi - 4| = 4 - \pi$.

8 Distances sur la droite ★★★

- a. $d = |-3 - 5| = |-8| = 8$.
- b. $d = |2,5 - (-1)| = |3,5| = 3,5$.
- c. $d = |-7 - (-2)| = |-5| = 5$.
- d. $d = |x - 4|$.

9 Intersections et réunions ★★★

- a. $I \cap J =]1 ; 4]$ (1 exclu car $1 \notin J$; 4 inclus dans les deux) ; $I \cup J = [-2 ; 7]$.
- b. $I \cap J = [-3 ; 0[$; $I \cup J =]-\infty ; +\infty[= \mathbb{R}$.
- c. Les deux intervalles ne se rencontrent pas : $I \cap J = \emptyset$; $I \cup J = [0 ; 2] \cup]5 ; 9]$ (pas de simplification possible).
- d. $3 \notin I$ donc $I \cap J = \emptyset$; mais $3 \in J$, et $] -1 ; 3[\cup [3 ; 8] =] -1 ; 8]$.

10 Valeur absolue et intervalle ★★★

- a. Centre 0, rayon 3 : $[-3 ; 3]$.

- b. Centre 2, rayon 5 : $]2 - 5 ; 2 + 5[=]-3 ; 7[$.
- c. $|x + 1| = |x - (-1)|$: centre -1 , rayon 4 : $[-5 ; 3]$.
- d. Distance à 0 strictement supérieure à 2 : $] -\infty ; -2[\cup]2 ; +\infty[$.
- e. Distance à 4 au moins égale à 1 : $] -\infty ; 3] \cup [5 ; +\infty[$.

11 Intervalle vers valeur absolue ★★★

- a. Centre $(1 + 9)/2 = 5$, rayon $(9 - 1)/2 = 4$: $|x - 5| \leq 4$.
- b. Centre $(-3 + 7)/2 = 2$, rayon $(7 - (-3))/2 = 5$: $|x - 2| < 5$.
- c. Centre $(-6 - 2)/2 = -4$, rayon $(-2 - (-6))/2 = 2$: $|x + 4| \leq 2$.

12 Encadrer une expression ★★★

- a. $6 < 3x < 15$ puis $7 < 3x + 1 < 16$.
- b. On multiplie par -2 (ordre inversé) : $-10 < -2x < -4$.
- c. $-5 < -x < -2$ puis $-1 < 4 - x < 2$.
- d. x est positif : $2^2 < x^2 < 5^2$, soit $4 < x^2 < 25$.
- e. x est strictement positif : la fonction inverse inverse l'ordre, donc $1/5 < 1/x < 1/2$.

13 Somme, différence, produit ★★★

- $a + b$: $2 + 1 \leq a + b \leq 3 + 4$, donc $3 \leq a + b \leq 7$.
- $a - b$: on a $-4 \leq -b \leq -1$; en additionnant, $2 - 4 \leq a - b \leq 3 - 1$, donc $-2 \leq a - b \leq 2$.
- $a \times b$: tous les nombres sont positifs, on multiplie les bornes : $2 \times 1 \leq ab \leq 3 \times 4$, soit $2 \leq ab \leq 12$.
- a/b : on a $1/4 \leq 1/b \leq 1$; en multipliant par $a \in [2 ; 3]$ (positif), $2/4 \leq a/b \leq 3$, soit $0,5 \leq a/b \leq 3$.

14 Inéquations du premier degré ★★★

- a. $3x < 12 \Leftrightarrow x < 4$. $S =]-\infty ; 4[$.
- b. $2x \geq -8 \Leftrightarrow x \geq -4$. $S = [-4 ; +\infty[$.
- c. $-5x > -10 \Leftrightarrow x < 2$ (division par -5 : le sens change). $S =]-\infty ; 2[$.
- d. $4x - x \leq 9 + 3 \Leftrightarrow 3x \leq 12 \Leftrightarrow x \leq 4$. $S =]-\infty ; 4]$.

15 Vrai ou faux ? ★★★

- a. **Faux.** Contre-exemple : $x = -5$ vérifie $-5 \leq 3$ mais $(-5)^2 = 25 > 9$.
- b. **Vrai.** La fonction inverse inverse l'ordre sur les réels strictement positifs.
- c. **Vrai.** Multiplier par -1 inverse l'ordre.
- d. **Vrai.** Les deux intervalles se chevauchent sur $]2 ; 3[$; l'union recouvre tout de 1 (exclu) à 5 (exclu).

- e. **Vrai.** Les nombres $x - 3$ et $3 - x$ sont opposés et deux opposés ont la même valeur absolue (la distance entre x et 3 est la même dans les deux sens).

16 Signe d'une expression affine ★★★

$2x - 6$ s'annule en 3 (car $2 \times 3 = 6$) ; $a = 2 > 0$.

x	$-\infty < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$2x - 6$	$-$	0	$+$

Donc $2x - 6 \geq 0$ sur $[3 ; +\infty[$.

$8 - 4x$ s'annule en 2 ; $a = -4 < 0$: positif avant 2 , négatif après.

x	$-\infty < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$8 - 4x$	$+$	0	$-$

Donc $8 - 4x > 0$ sur $] -\infty ; 2[$.

17 Inéquations avec fractions ★★★

- a. On multiplie par 6 (positif) : $3(x - 1) \geq 2(2x + 3)$, soit $3x - 3 \geq 4x + 6$. Alors $-x \geq 9$, donc $x \leq -9$. **S** = $] -\infty ; -9]$. Contrôle avec $x = -9$: les deux membres valent -5 (égalité, borne incluse).
- b. $5 - 3x - 6 < 2x + 4 \Leftrightarrow -3x - 1 < 2x + 4 \Leftrightarrow -5 < 5x \Leftrightarrow x > -1$. **S** = $] -1 ; +\infty[$.

18 Produit de deux facteurs ★★★

$x + 3$ s'annule en -3 ($a = 1 > 0$) ; $2 - x$ s'annule en 2 ($a = -1 < 0$).

x	$-\infty < x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$x + 3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2 - x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
produit	$-$	0	$+$	0	$-$

Le produit est positif ou nul sur $[-3 ; 2]$ (zéros inclus). **S** = $[-3 ; 2]$.

19 Un quotient ★★★

Le dénominateur s'annule en -4 : cette valeur est interdite. Le numérateur s'annule en 1 .

x	$-\infty < x < -4$	$x = -4$	$-4 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$x - 1$	–	–	–	0	+
$x + 4$	–	0	+	+	+
quotient	+		–	0	+

Le quotient est strictement négatif pour $-4 < x < 1$. **S** = $] -4 ; 1[$. Contrôle : pour $x = 0$, le quotient vaut $-0,25 < 0$.

20 Abonnement ou tarif libre ★★★

- a. Prix A = $12 + 2,5n$; prix B = $4,5n$.
b. On cherche $12 + 2,5n < 4,5n \Leftrightarrow 12 < 2n \Leftrightarrow n > 6$. Pour $n = 6$ les prix sont égaux (27 €). **Réponse** : la formule A est plus avantageuse à partir de 7 séances.

21 Tolérance d'un thermostat ★★★

- a. 5 % de 180 = $0,05 \times 180 = 9$ °C.
b. Condition : $|T - 180| \leq 9$, soit $T \in [180 - 9 ; 180 + 9] = [171 ; 189]$. Le four est correct entre 171 °C et 189 °C.

22 Un randonneur et son refuge ★★★

« À au plus 3 km du refuge » : $|x - 12| \leq 3$, soit $x \in [9 ; 15]$. « Au moins au kilomètre 10 » : $x \in [10 ; +\infty[$. Les deux conditions doivent être réalisées : on prend l'intersection $[9 ; 15] \cap [10 ; +\infty[= [10 ; 15]$.

23 Valeur absolue et réunion ★★★

$|x - 1| > 3$ signifie que x est à une distance de 1 strictement supérieure à 3 : $x < 1 - 3$ ou $x > 1 + 3$. Donc **S** = $] -\infty ; -2[\cup]4 ; +\infty[$.

Intersection avec $[-5 ; 6]$: $[-5 ; -2[\cup]4 ; 6]$.

(Voir la droite graduée sur la page en ligne.)

24 Une preuve sur les carrés ★★★

Comme $a > 0$, on multiplie $a < b$ par a : $a^2 < ab$. Comme $b > 0$, on multiplie $a < b$ par b : $ab < b^2$. Donc $a^2 < ab < b^2$, d'où $a^2 < b^2$.

Pour des négatifs, l'ordre est inversé : $-5 < -2$ mais $(-5)^2 = 25 > (-2)^2 = 4$.

25 Signe d'un trinôme factorisé ★★★

Les facteurs s'annulent en 1 et en 2.

x	$-\infty < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$x - 1$	−	0	+	+	+
$x - 2$	−	−	−	0	+
produit	+	0	−	0	+

Le produit est négatif ou nul sur $[1 ; 2]$: $S = [1 ; 2]$. Or $(x - 1)(x - 2) = x^2 - 3x + 2$, donc $x^2 - 3x + 2 \leq 0$, soit $x^2 + 2 \leq 3x$ pour $x \in [1 ; 2]$.

26 Un rectangle à encadrer ★★★

Périmètre : $P = 2(x + x + 3) = 4x + 6$. De $2 \leq x \leq 5$ on tire $8 \leq 4x \leq 20$ puis $14 \leq P \leq 26$: le périmètre est compris entre 14 cm et 26 cm.

Aire : $A = x(x + 3)$. Les deux facteurs sont positifs et croissants avec x : le minimum est pour $x = 2$, soit $2 \times 5 = 10$, le maximum pour $x = 5$, soit $5 \times 8 = 40$. Donc $10 \leq A \leq 40$: l'aire est comprise entre 10 cm² et 40 cm².

27 Inéquation à réduire ★★★

$3x+1/x-1 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 3x+1-2(x-1)/x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x+3/x-1 \geq 0$. Le numérateur $x + 3$ s'annule en -3 , le dénominateur $x - 1$ en 1.

x	$-\infty < x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$x + 3$	−	0	+	+	+
$x - 1$	−	−	−	0	+
quotient	+	0	−		+

Le quotient est positif ou nul sur $] -\infty ; -3]$ et sur $]1 ; +\infty[$. $S =] -\infty ; -3] \cup]1 ; +\infty[$.
Contrôle : $x = 3$ donne $10/2 = 5 \geq 2$.