

Intervalles, inégalités et inéquations

Cours de maths - 2de

En 2de, on ne travaille plus seulement avec des entiers ou des décimaux : on manipule **tous les nombres réels**, et surtout des **ensembles** de nombres. Dans ce chapitre, tu apprends à décrire ces ensembles avec des **intervalles**, à les combiner (réunion, intersection), à mesurer un écart avec la **valeur absolue**, puis à résoudre des **inéquations** en t'appuyant sur les règles de calcul avec les inégalités et sur les **tableaux de signes**.

1. Les ensembles de nombres et la droite réelle

Les ensembles usuels $\mathbb{N}$: entiers naturels (0 ; 1 ; 2...). $\mathbb{Z}$: entiers relatifs (...-2 ; -1 ; 0 ; 1...). $\mathbb{Q}$: nombres décimaux. $\mathbb{Q}$: nombres rationnels, c'est-à-dire les quotients p/q d'un entier p par un entier non nul q . $\mathbb{R}$: nombres réels, c'est-à-dire tous les nombres de la droite graduée. On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (le signe $\subset$ se lit « est inclus dans »).

Chaque nombre réel correspond à **un point** d'une droite graduée, et réciproquement. Des nombres comme $\sqrt{2}$ ou π sont réels mais ne sont pas rationnels : on les appelle des **irrationnels**. Les symboles $\in$ (« appartient à ») et $\notin$ (« n'appartient pas à ») relient un **nombre** et un **ensemble** : on écrit $-3 \in \mathbb{Z}$, $1/3 \in \mathbb{Q}$, mais $1/3 \notin \mathbb{Z}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Ne pas confondre $\in$ et $\subset$ $\in$ relie un élément à un ensemble ($5 \in \mathbb{N}$) ; $\subset$ relie deux ensembles ($\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$). Écrire « $5 \subset \mathbb{N}$ » est une faute.

L'ordre sur $\mathbb{R}$ se lit sur la droite : $a < b$ signifie que le point a est à gauche du point b . Les symboles $<$, $>$ (inégalités strictes) et $\leq$, $\geq$ (inégalités larges) servent à décrire des ensembles de nombres : « $x \leq 3$ » désigne **tous** les réels situés à gauche de 3, 3 compris.

2. Les intervalles de $\mathbb{R}$

Intervalle Un intervalle est un ensemble de réels « sans trou », qui se décrit à l'aide de deux **bornes**. Pour $a < b$, l'intervalle fermé $[a ; b]$ est l'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$. Son **amplitude** (ou longueur) est $b - a$.

Inégalité	Intervalle	Lecture
$a \leq x \leq b$	$[a ; b]$	fermé en a et en b
$a < x \leq b$	$]a ; b]$	ouvert en a , fermé en b
$a \leq x < b$	$[a ; b[$	fermé en a , ouvert en b

Inégalité	Intervalle	Lecture
$a < x < b$	$]a ; b[$	ouvert aux deux bornes
$x \geq a$	$[a ; +\infty[$	tous les réels à partir de a
$x > a$	$]a ; +\infty[$	strictement plus grands que a
$x \leq b$	$] -\infty ; b]$	tous les réels jusqu'à b
$x < b$	$] -\infty ; b[$	strictement plus petits que b

À savoir • Un crochet tourné **vers** le nombre ($[a$ ou $b]$) signifie que la borne est **incluse** ; un crochet tourné **vers l'extérieur** ($]a$ ou $b[$) signifie qu'elle est **exclue**. • Le crochet est **toujours ouvert en $+\infty$ et en $-\infty$** , car l'infini n'est pas un nombre. • $\mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$; les réels positifs forment $\mathbb{R}_+ = [0 ; +\infty[$; les réels négatifs $\mathbb{R}_- =]-\infty ; 0]$; les réels non nuls $\mathbb{R}^* =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.

Sur la droite, on représente un intervalle par un trait épais ; une borne incluse est marquée d'un point plein, une borne exclue d'un point creux (ou d'un crochet tourné vers l'extérieur).

(Voir la droite graduée sur la page en ligne.)

En bleu : $[-2 ; 4[$ (-2 inclus, 4 exclu). En orange : $]1 ; +\infty[$ (1 exclu).

Exemple $-1,5 \in [-2 ; 4[$ car $-2 \leq -1,5 < 4$. En revanche $4 \notin [-2 ; 4[$ (borne exclue) et $1 \notin]1 ; +\infty[$. L'amplitude de $[-2 ; 4[$ est $4 - (-2) = 6$.

Pièges Un intervalle s'écrit toujours avec la plus petite borne à gauche : $[5 ; 2]$ n'a aucun sens. On n'écrit jamais $]3 ; +\infty]$ (crochet fermé en $+\infty$). Et le point-virgule sépare les bornes, car la virgule est déjà utilisée pour les nombres décimaux : $[2,5 ; 4]$.

3. Intersection et réunion

Intersection et réunion Soit I et J deux ensembles de réels. • L'**intersection** $I \cap J$ est l'ensemble des réels qui appartiennent à I **et** à J . • La **réunion** $I \cup J$ est l'ensemble des réels qui appartiennent à I **ou** à J (ou aux deux). Si I et J n'ont aucun élément commun, on écrit $I \cap J = \emptyset$ (l'ensemble vide).

Déterminer une intersection ou une réunion 1. Représente chaque intervalle sur une même droite, sur deux lignes différentes. 2. Pour l'intersection, garde la partie où les deux traits se superposent ; pour la réunion, garde tout ce qui est coloré par au moins un des deux. 3. Soigne les crochets : une borne est incluse dans l'intersection seulement si elle est incluse dans **les deux** intervalles.

Exemple résolu Soit $I = [-3 ; 5]$ et $J =]2 ; 7]$.

(Voir la droite graduée sur la page en ligne.)

En bleu I , en orange J , en vert la partie commune.

Les deux traits se superposent entre 2 (exclu, car $2 \notin J$) et 5 (inclus, car $5 \in I$ et $5 \in J$).
Donc $I \cap J =]2 ; 5]$. Et $I \cup J = [-3 ; 7]$.

Quand la réunion ne se simplifie pas $[0 ; 1] \cup [3 ; 4]$ ne peut pas s'écrire avec un seul intervalle (il y a un « trou » entre 1 et 3). On laisse alors la réunion écrite telle quelle. Attention aussi : $[0 ; 2[\cup [2 ; 5] = [0 ; 5]$, car 2 est dans le deuxième intervalle.

4. Valeur absolue et distance

Valeur absolue La valeur absolue d'un réel x , notée $|x|$, est la **distance de x à 0** sur la droite graduée. Si $x \geq 0$ alors $|x| = x$; si $x \leq 0$ alors $|x| = -x$. Une valeur absolue est donc toujours positive ou nulle.

Exemples $|5,4| = 5,4$; $|-8| = 8$; $|0| = 0$; $|2 - 7| = |-5| = 5$; $|\sqrt{3} - 2| = 2 - \sqrt{3}$ car $\sqrt{3} \approx 1,73$ est plus petit que 2, donc $\sqrt{3} - 2$ est négatif.

Distance entre deux réels La distance entre les points d'abscisses a et b est $d(a ; b) = |a - b| = |b - a|$. En particulier $|x| = d(x ; 0)$.

Cette définition donne un moyen très efficace de traduire des inégalités avec valeur absolue.

Propriété (valeur absolue et intervalles) Soit a un réel et $r > 0$. Alors $|x - a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r \Leftrightarrow x \in [a - r ; a + r]$. De même, $|x - a| < r \Leftrightarrow x \in]a - r ; a + r[$. Enfin, $|x - a| \geq r \Leftrightarrow x \in]-\infty ; a - r] \cup [a + r ; +\infty[$.

Démonstration. $|x - a| \leq r$ signifie que la distance entre x et a est au plus r , c'est-à-dire que le point x est situé entre $a - r$ et $a + r$ sur la droite. Les deux autres cas s'obtiennent de même avec des inégalités strictes, ou en passant au « contraire » : être à distance au moins r de a , c'est être en dehors de l'intervalle ouvert précédent.

(Voir la droite graduée sur la page en ligne.)

$|x - 4| \leq 3$: les réels situés à une distance de 4 d'au plus 3 forment $[1 ; 7]$. Ici $a = 4$ est le centre et $r = 3$ le rayon.

Résoudre $|x - a| \leq r$ et l'inverse • De la valeur absolue à l'intervalle : repère le centre a et le rayon r , puis écris $[a - r ; a + r]$. • De l'intervalle à la valeur absolue : le centre est le **milieu $a+b/2$** et le rayon est la **demi-amplitude $b-a/2$** . Pour $[2 ; 10]$, le centre est 6 et le rayon 4 : $x \in [2 ; 10] \Leftrightarrow |x - 6| \leq 4$.

5. Inégalités et opérations

Règles de calcul avec les inégalités Soit a, b, c trois réels. • **Addition** : si $a < b$, alors $a + c < b + c$ (on peut ajouter ou retrancher le même nombre aux deux membres). • **Multiplication par un réel positif** : si $a < b$ et $c > 0$, alors $ac < bc$: l'ordre est **conservé**. • **Multiplication par un réel négatif** : si $a < b$ et $c < 0$, alors $ac > bc$: l'ordre est **inversé**. • **Somme** : si $a < b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$.

Démonstration de la règle du signe négatif. Si $a < b$, alors $b - a > 0$. Pour $c < 0$, le produit $c(b - a)$ est négatif (produit d'un négatif par un positif), donc $cb - ca < 0$, c'est-à-dire $cb < ca$, soit $ca > cb$.

Exemple Pour $2 < 5$, on multiplie par -3 : $-6 > -15$. Le sens a changé, et c'est normal : -6 est bien à droite de -15 .

Fonctions carré et inverse • Sur les réels **positifs**, si $0 \leq a < b$, alors $a^2 < b^2$: on conserve l'ordre. • Sur les réels **strictement positifs**, si $0 < a < b$, alors $1/b < 1/a$: l'ordre est inversé. Il en va de même sur les réels strictement négatifs.

Ne soustrais pas deux inégalités ! De $2 < x < 5$ et $1 < y < 3$, on ne peut pas faire « $x - y$ » en soustrayant membre à membre. On écrit $-3 < -y < -1$ puis on **additionne** : $2 + (-3) < x - y < 5 + (-1)$, soit $-1 < x - y < 4$. Avec les carrés, vérifie aussi le signe : $-3 < 2$ mais $9 > 4$!

Encadrer une expression Pour encadrer $5 - 2x$ sachant que $1 \leq x \leq 4$: on multiplie par -2 (l'ordre s'inverse) pour obtenir $-8 \leq -2x \leq -2$, puis on ajoute 5 : $-3 \leq 5 - 2x \leq 3$.

6. Inéquations du premier degré

Inéquation Résoudre une inéquation d'inconnue x , c'est trouver **tous** les réels x qui la vérifient ; l'ensemble de ces réels s'appelle l'**ensemble des solutions** et s'écrit en général sous forme d'intervalle. Deux inéquations qui ont les mêmes solutions sont dites **équivalentes** (symbole $\Leftrightarrow$).

Méthode 1. Développe et réduis chaque membre si nécessaire ; supprime les dénominateurs en multipliant par un nombre **positif**. 2. Regroupe les termes en x d'un côté et les nombres de l'autre (on ajoute ou retranche des deux côtés). 3. Divise par le coefficient de x : si ce coefficient est **négatif**, on **change le sens** de l'inégalité. 4. Écris l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle, puis (si on le demande) représente-le sur la droite.

Exemple 1 Résoudre $7 - 4x > 3x + 21$. $7 - 4x > 3x + 21 \Leftrightarrow -4x - 3x > 21 - 7 \Leftrightarrow -7x$

$> 14 \Leftrightarrow x < -2$ (on divise par -7 : le sens change). $S =]-\infty ; -2[$. Contrôle : pour $x = -3$, le membre de gauche vaut 19 et celui de droite 12 : $19 > 12$, c'est vrai.

Exemple 2 : avec des fractions Résoudre $x + \frac{1}{2} \leq 2x - \frac{1}{5}$. On multiplie par 10 (positif) : $5(x + 1) \leq 2(2x - 1)$, soit $5x + 5 \leq 4x - 2$, donc $x \leq -7$. $S =]-\infty ; -7]$. Contrôle avec $x = -7$: $-\frac{6}{2} = -3$ et $-\frac{15}{5} = -3$, égalité, donc la borne est bien incluse.

Astuce du coach Mathbot te le répète : après chaque inéquation, teste une valeur dans l'intervalle trouvé **et** une valeur en dehors. Si les deux réponses sont cohérentes, tu peux être sûr de toi.

Cas particuliers Si x disparaît, l'inéquation devient une phrase toujours vraie (par exemple $3 < 5$: $S = \mathbb{R}$) ou toujours fausse (par exemple $4 < 1$: $S = \emptyset$).

7. Tableaux de signes

Signe de $ax + b$ ($a \neq 0$) L'expression $ax + b$ s'annule en $x_0 = -\frac{b}{a}$. Elle a le **signe de a** à droite de x_0 et le **signe contraire de a** à gauche de x_0 .

Justification. Si $a > 0$: $ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$. Si $a < 0$, la division par a change le sens : $ax + b > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$.

Exemple Signe de $3x - 12$: il s'annule en 4 ; $a = 3 > 0$, donc négatif avant 4, positif après.

x	$-\infty < x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
$3x - 12$	$-$	0	$+$

Signe d'un produit ou d'un quotient 1. Mets l'expression sous forme d'un produit ou d'un quotient de facteurs du premier degré. 2. Cherche la valeur qui annule chaque facteur et range ces valeurs dans l'ordre croissant. 3. Dresse un tableau : une ligne par facteur, avec leurs signes, puis une dernière ligne pour le produit ou le quotient (règle des signes). 4. Pour un quotient, la valeur qui annule le **dénominateur** est **interdite** : on la marque d'une double barre $\parallel$ et le crochet est toujours ouvert dessus.

Exemple résolu Résoudre $(x - 3)(5 - x) > 0$. Les facteurs s'annulent en 3 et en 5. Pour $5 - x$: $a = -1 < 0$, donc positif avant 5, négatif après.

x	$-\infty < x < 3$	$x = 3$	$3 < x < 5$	$x = 5$	$x > 5$
$x - 3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$5 - x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
produit	$-$	0	$+$	0	$-$

Le produit est strictement positif quand $3 < x < 5$. $S =]3 ; 5[$.

8. Inéquations produit et quotient, problèmes

Résoudre une inéquation « produit » ou « quotient » 1. Passe tout dans un seul membre pour comparer à 0 : par exemple $x+1/x-2 \geq 3$ devient $x+1/x-2 - 3 \geq 0$. 2. Réduis au même dénominateur et factorise pour obtenir un produit ou un quotient de facteurs du premier degré. 3. Dresse le tableau de signes et lis les intervalles qui conviennent (attention aux valeurs interdites).

Exemple résolu Résoudre $x+1/x-2 \geq 3$ (avec $x \neq 2$). $x+1/x-2 - 3 = x+1-3(x-2)/x-2 = -2x+7/x-2$. Il faut donc $-2x+7/x-2 \geq 0$. Le numérateur s'annule en $7/2 (= 3,5)$ et le dénominateur en 2.

x	$-\infty < x < 2$	$x = 2$	$2 < x < 3,5$	$x = 3,5$	$x > 3,5$
$-2x + 7$	+	+	+	0	-
$x - 2$	-	0	+	+	+
quotient	-		+	0	-

Le quotient est positif ou nul pour $2 < x \leq 3,5$. $S =]2 ; 3,5]$.

Résoudre un problème par une inéquation 1. Choisis l'inconnue x et précise son unité. 2. Traduis la condition de l'énoncé par une inéquation. 3. Résous-la. 4. Interprète la solution dans le contexte (un nombre de séances est un entier positif !) et rédige une phrase-réponse.

Exemple Un cinéma propose un abonnement à 20 € par an puis 5 € la place, contre 8 € la place sans abonnement. À partir de combien de places l'abonnement est-il plus avantageux ? On résout $20 + 5n < 8n \Leftrightarrow 20 < 3n \Leftrightarrow n > 20/3 \approx 6,67$. Comme n est entier, l'abonnement est avantageux dès **7 places**.

À retenir

- $[a ; b]$: $a \leq x \leq b$. Crochet tourné vers le nombre = borne incluse ; toujours ouvert en $\pm\infty$. Amplitude = $b - a$.
- $I \cap J$: dans I **et** dans J ; $I \cup J$: dans I **ou** dans J . On s'aide d'un dessin sur la droite.
- $|x|$ est la distance à 0 ; $d(a ; b) = |a - b|$; $|x - a| \leq r \Leftrightarrow x \in [a - r ; a + r]$.
- On peut ajouter un même nombre aux deux membres d'une inégalité. Multiplier par un positif **conserve** l'ordre ; par un négatif, il **s'inverse**.
- Pour encadrer une somme, on additionne les encadrements ; pour une différence, on passe par l'opposé.
- Inéquation du premier degré : on isole x et on change le sens en divisant par un négatif ; on conclut par un intervalle.
- $ax + b$ a le signe de a après sa racine $-b/a$ et le signe contraire avant.

- Produit ou quotient : comparer à 0, factoriser, tableau de signes ; les valeurs qui annulent un dénominateur sont interdites.